

**UNIVERSIDADE DO GRANDE RIO - UNIGRANRIO  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA (PROPEP)  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DAS CIÊNCIAS NA EDUCAÇÃO  
BÁSICA**

**CARLOS ANTONIO DE SOUZA**

**USO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA COMO ELEMENTO  
FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO:  
UM ESTUDO DE CASO**

**DUQUE DE CAXIAS, RJ  
2012**

CARLOS ANTONIO DE SOUZA

USO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA COMO ELEMENTO  
FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO:  
UM ESTUDO DE CASO

Dissertação Apresentada ao Mestrado Profissional  
em Ensino das Ciências na Educação Básica da  
Universidade do Grande Rio, Unigranrio, como  
Parte dos Requisitos para a Obtenção do Título de  
Mestre em Ensino das Ciências.

Orientadora:

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Eline das Flores Victer

Co- Orientadora:

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Jurema Rosa Lopes

DUQUE DE CAXIAS-RJ  
2012

## CATALOGAÇÃO NA FONTE/BIBLIOTECA – UNIGRANRIO

S729u Souza, Carlos Antonio de.  
Uso da história da trigonometria como elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno: um estudo de caso / Carlos Antonio de Souza.  
- 2012.  
109 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades, 2012.  
“Orientadora Prof.<sup>a</sup> Eline das Flores Vicker”.  
“Co-Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Jurema Rosa Lopes”.  
Bibliografia: p. 100-102.

1. Educação. 2. Trigonometria - História. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Trigonometria – Ensino médio. I. Vicker, Eline das Flores. II. Lopes, Jurema Rosa. III. Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”. IV. Título.

CDD –370

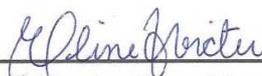
CARLOS ANTONIO DE SOUZA

USO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA COMO ELEMENTO  
FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E  
COSSENO: UM ESTUDO DE CASO

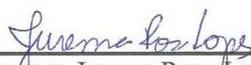
Dissertação apresentada, como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Ensino das Ciências na  
Educação Básica no curso de Pós-Graduação em Ensino  
das Ciências na Educação Básica da Universidade do  
Grande Rio "Professor José de Souza Herdy".

Aprovado em 26 de setembro de 2012.

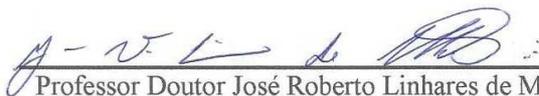
**BANCA EXAMINADORA:**



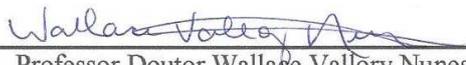
Professora Doutora Eline das Flores Victor  
UNIGRANRIO - Universidade do Grande Rio



Professora Doutora Jurema Rosa Lopes  
UNIGRANRIO - Universidade do Grande Rio



Professor Doutor José Roberto Linhares de Mattos  
UFF - Universidade Federal Fluminense



Professor Doutor Wallae Vallory Nunes  
IFRJ - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro



Professora Doutora Haydeia Maria Marino de Sant'Anna Reis  
UNIGRANRIO - Universidade do Grande Rio

## DEDICATÓRIA

*A minha esposa Zaida e a minha filha Clarissa  
pela compreensão e estímulo nos momentos em  
que mais precisei.*

*Aos meus pais Onofre de Souza (in memoriam) e  
Celicina A. de Souza por todos os valores que  
me foram ensinados.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me ajudado em mais esta etapa de minha jornada.

A todos os meus familiares e a todos os amigos, pois sem o apoio deles nada disto seria possível.

À minha esposa e filha, que me ajudaram na digitação deste trabalho.

Ao Felisberto Silva, por ter enviado um livro que foi muito útil ao desenvolvimento do meu trabalho.

Às minhas orientadoras Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Eline das Flores Victor e Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Jurema Rosa Lopes pela dedicação com que me ajudaram no desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Doutores Haydéa Maria Marino de Sant'Anna Reis, José Roberto Linhares de Mattos e Wallace Vallory Nunes, integrantes da Banca Examinadora, pela aceitação, sugestões e comentários que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Aos amigos de mestrado que compartilharam comigo os momentos de aprendizado nos ajudando mutuamente.

À Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Helena Corrêa de Vasconcelos - UFRRJ, pelo carinho e amizade a mim dedicados em todos os momentos que a procurei para tirar dúvidas referentes a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcos Aguiar de Souza - UFRRJ, pela ajuda nos dados estatísticos deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Wallace Vallory Nunes - IFRJ/Nilópolis, pelo incentivo para que eu fizesse o mestrado.

Ao Prof. MS Heitor Achilles - IFRJ/Nilópolis, pelo empenho na idealização do Ensaio.

Ao Prof. Dr. Manoel Simões - IFRJ/Nilópolis, pelo empenho na confecção do Ensaio.

Ao amigo Prof. MS. Mauro José dos Santos Flóra - Colégio Naval, pela ajuda e apoio nos momentos em que precisei de um ombro amigo.

À Direção e aos alunos do IFRJ/Nilópolis, que contribuíram para a realização desta pesquisa.

Aos diretores do Colégio Estadual Presidente Dutra, Prof. José Eduardo P. Farias, Prof<sup>a</sup> Nilza Pereira O. e Silva e Prof<sup>a</sup> Maria Sara V. Bastos, pela ajuda ao me liberar quando necessitei de tempo para escrever esta dissertação.

À UNIGRANRIO e a todos os professores do Mestrado Profissional em Ensino das Ciências na Educação Básica, que fizeram parte deste caminhar.

Finalmente agradecer a todos que contribuíram de uma forma ou de outra, para a realização deste trabalho, gostaria de expressar minha profunda gratidão.

## EPÍGRAFE

*"... há bons livros didáticos em qualquer disciplina, mas adotar um único como livro de texto, vai contra a facilitação da aprendizagem significativa crítica. É uma prática docente deformadora, ao invés de formadora, tanto para alunos como para professores" (MOREIRA)*

## RESUMO

Partindo da compreensão de que os conceitos de função seno e cosseno foram construídos no decorrer do processo histórico e que este processo levou séculos para significar o que hoje representa, parece coerente suspeitar que o conhecimento dessa história retire tais conceitos da zona de suposta abstração e falta de clareza, favorecendo a aprendizagem de tais conceitos e seus desdobramentos. Nessa perspectiva, a questão básica do presente estudo é: como o uso da História da Matemática no processo do ensino de trigonometria nas funções seno e cosseno, pode levar o aluno a ter uma aprendizagem mais significativa? O objetivo é investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno, por parte de estudantes do ensino médio. Teoricamente, este estudo se baseia em Freire (1996), Cajazeiras (2011) e Moreira (2011), dando destaque para o processo ensino e aprendizagem, sobretudo a aprendizagem significativa. Kennedy (1992), Eves (2008) e Boyer (2010) trazem as informações históricas sobre a matemática e trigonometria, entre outros. Do ponto de vista metodológico, o estudo, é de natureza quanti-qualitativa, realizado em quatro fases: um pré-teste, para verificar os conhecimentos anteriores dos alunos; a utilização de material didático nomeado como Ensaio; um pós-teste com o intuito de obter dados comparativos de desempenho, e de um questionário sondando como a História da Trigonometria ajuda na compreensão e aprendizagem das funções seno e cosseno. Essa experiência pedagógica envolveu 21 alunos, do primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública federal, localizada no município de Nilópolis/RJ. Os resultados, além de um tratamento qualitativo, foram submetidos a tratamento estatístico apropriado à natureza das informações coletadas. A diferença entre as médias obtidas pelos alunos em pré e pós-testes usados, antes e após a mencionada experiência pedagógica ter sido desenvolvida, foi significativamente superior do que antes, em um teste  $t$  significativo, em favor do pós-teste, com um nível de significância de 0,01. Os resultados do questionário, tanto quanto da questão subjetiva que integrava o teste, revelaram uma aproximação sensível aos dados quantitativos. Assim, a conclusão do estudo evidencia que a História da Matemática é um elemento facilitador ao ensino das funções seno e cosseno, quantitativa e qualitativamente, confirmando a nossa aposta ou hipótese de trabalho, pois o método trouxe avanço na aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos .

**PALAVRAS-CHAVE:** História da Trigonometria. Ensino de Matemática. Trigonometria. Ensino Médio.

## ABSTRACT

Based on the understanding that the concepts of sine and cosine function were built during the historical process and that this process took centuries to mean what today represents, seems coherent suspect that the knowledge of this story remove such concepts supposedly zone abstraction and lack of clarity, favoring learning these concepts and its developments. From this perspective, the basic question of this study is: how use of the History of Mathematics in the process of teaching trigonometry functions sine and cosine, can lead the student to have a more meaningful learning? The objective is to investigate how the history of trigonometry can be constituted as a facilitator of learning the functions sine and cosine, by high school students. Theoretically, this study is based on Cajazeiras (2011), Freire (1996), Moreira (2011), highlighting the teaching and learning process, especially meaningful learning in Boyer (2010), Eves (2008) and Kennedy (1992) that brings information and stories about math trigonometry, among others. From the methodological point of view, the study is a quantitative and qualitative nature, conducted in four phases: a pre-test to check students prior knowledge, the use of courseware named test, a post-test in order to obtain comparative performance data, and a questionnaire probing how the History of Trigonometry help in understanding and learning of sine and cosine functions. This pedagogical experiment involving 21 students, the first year of high school, a federal public school, located in the municipality of Nilópolis/RJ. The results, along with a qualitative treatment, were subjected to statistical treatment appropriate to the nature of information collected. The difference between the averages for students in pre and post-tests used before and after the aforementioned pedagogical experience have been developed, was significantly higher than before, at a significant  $t$  test, in favor of the post-test, with a level significance of 0.01. The results of the questionnaire, as well as the subjective question that integrated testing revealed a sensitive approach to quantitative data. Thus, the conclusion of the study shows that the history of mathematics as a facilitator to the teaching of sine and cosine functions, quantitatively and qualitatively, confirming our working hypothesis bet or because the method brought forward in student learning on the content.

**KEYWORDS:** History of Trigonometry, Teaching of Mathematics, Trigonometry, High School.

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
<b>Figura 4.1-</b> Resposta do aluno F no Pré-Teste.	79
<b>Figura 4.2-</b> Resposta do aluno A no Pós-Teste.	80
<b>Figura 4.3-</b> Resposta do aluno B no Pós-Teste.	80
<b>Figura 4.4-</b> Resposta do aluno H no Pós-Teste.	81
<b>Figura 4.5-</b> Resposta do aluno Q no Pós-Teste.	81
<b>Figura 4.6-</b> Resposta do aluno J no Pré-Teste.	82
<b>Figura 4.7-</b> Resposta do aluno C no Pós-Teste.	82
<b>Figura 4.8-</b> Resposta do aluno D no Pós-Teste.	83
<b>Figura 4.9-</b> Resposta do aluno J no Pós-Teste.	83
<b>Figura 4.10-</b> Resposta do aluno M no Pós-Teste.	84
<b>Figura 4.11-</b> Resposta do aluno N no Pós-Teste.	84
<b>Figura 4.12-</b> Resposta do aluno T no Pós-Teste.	85
<b>Figura 4.13-</b> Resposta do aluno B no Pré-Teste.	85
<b>Figura 4.14-</b> Resposta do aluno G no Pré-Teste.	85
<b>Figura 4.15-</b> Resposta do aluno H no Pré-Teste.	86
<b>Figura 4.16-</b> Resposta do aluno K no Pré-Teste.	86
<b>Figura 4.17-</b> Resposta do aluno L no Pré-Teste.	87
<b>Figura 4.18-</b> Resposta do aluno R no Pré-Teste.	87
<b>Figura 4.19-</b> Resposta do aluno S no Pré-Teste.	87
<b>Figura 4.20-</b> Resposta do aluno F no Pós-Teste.	88
<b>Figura 4.21-</b> Resposta do aluno G no Pós-Teste.	88
<b>Figura 4.22-</b> Resposta do aluno I no Pós-Teste.	89
<b>Figura 4.23-</b> Resposta do aluno K no Pós-Teste.	89
<b>Figura 4.24-</b> Resposta do aluno L no Pós-Teste.	89
<b>Figura 4.25-</b> Resposta do aluno O no Pós-Teste.	90
<b>Figura 4.26-</b> Resposta do aluno P no Pós-Teste.	90
<b>Figura 4.27-</b> Resposta do aluno R no Pós-Teste.	91
<b>Figura 4.28-</b> Resposta do aluno S no Pós-Teste.	91
<b>Figura 4.29-</b> Resposta do aluno U no Pós-Teste.	91

## LISTA DE GRÁFICOS

	<b>Página</b>
<b>GRÁFICO 4.1</b> - Resultados Gerais do Pré-Teste e Pós-Teste	<b>70</b>
<b>GRÁFICO 4.2</b> - Resultado do Pré-Teste	<b>73</b>
<b>GRÁFICO 4.3</b> - Resultado do Pós-Teste	<b>74</b>

## LISTA DE QUADROS

	<b>Página</b>
<b>Quadro 4.1</b> - Posicionamento Estudantil no Teste Sobre o Uso da História da Matemática no Processo de Ensino de Trigonometria.	<b>75</b>

## LISTA DE TABELAS

	Página
<b>Tabela 4.1</b> - Resultados da Questão 1	62
<b>Tabela 4.2</b> - Resultados da Questão 2	63
<b>Tabela 4.3</b> - Resultados da Questão 3	64
<b>Tabela 4.4</b> - Resultados da Questão 4	65
<b>Tabela 4.5</b> - Resultados da Questão 5	66
<b>Tabela 4.6</b> - Resultados da Questão 6	67
<b>Tabela 4.7</b> - Resultados da Questão 7	68
<b>Tabela 4.8</b> - Resultados da Questão 8	69
<b>Tabela 4.9</b> - Comparação dos escores obtidos pelo grupo de estudantes, antes e após uma experiência de ensino-aprendizagem na área de Matemática com a utilização do Teste $t$ de Student, para amostras pareadas.	72
<b>Tabela 4.10</b> - Teste de amostras emparelhadas comparando médias obtidas por alunos em pré e pós-Teste, aplicado antes e após terem sido submetidos a uma experiência de ensino-aprendizagem na área de Matemática.	73

## SUMÁRIO

	Página
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>18</b>
1.1 - ESTUDO EXPLORATÓRIO	18
1.2 - O ENSINO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS PCN's	23
1.3 – REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM	28
1.4 O NOSSO OLHAR SOBRE A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA	36
<b>CAPÍTULO 2 - RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA</b>	<b>41</b>
2.1. A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	41
2.2. ESTUDO HISTORIOGRÁFICO DA MATEMÁTICA	44
2.3. ESTUDO HISTORIOGRÁFICO DA TRIGONOMETRIA.	48
<b>CAPÍTULO 3 - APORTES TEÓRICO-METODOLÓGICO</b>	<b>56</b>
3.1 A METODOLOGIA DE PESQUISA	56
3.2. A DESCRIÇÃO DOS SUJEITOS E DO LÓCUS DE PESQUISA	57
3.3 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS	57
3.4. AS FASES DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA	57
3.5 DESCRIÇÃO INTENSIVA DO ENSAIO	59
<b>CAPÍTULO 4 - A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA COMO ELEMENTO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO</b>	<b>61</b>
4.1 O RESULTADO DOS ALUNOS DIANTE DA ALTERAÇÃO DE UMA METADOLOGIA EM SALA DE AULA	61
4.2 - AS QUESTÕES OBJETIVAS	62
4.2.1 – ANÁLISE DA QUESTÃO 1	62
4.2.2 – ANÁLISE DA QUESTÃO 2	63
4.2.3 – ANÁLISE DA QUESTÃO 3	64

<b>4.2.4 – ANÁLISE DA QUESTÃO 4</b>	<b>65</b>
<b>4.2.5 – ANÁLISE DA QUESTÃO 5</b>	<b>66</b>
<b>4.2.6 – ANÁLISE DA QUESTÃO 6</b>	<b>66</b>
<b>4.2.7 – ANÁLISE DA QUESTÃO 7</b>	<b>68</b>
<b>4.2.8 – ANÁLISE DA QUESTÃO 8</b>	<b>69</b>
<b>4.2.9 - RESULTADOS DAS QUESTÕES OBJETIVAS, UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA</b>	<b>69</b>
<b>4.3 - A QUESTÃO DISSERTATIVA</b>	<b>74</b>
<b>4.3.1 UMA DISCUSSÃO SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</b>	<b>79</b>
<b>4.3.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FACILITADORA DA MEMORIZAÇÃO DAS FÓRMULAS.</b>	<b>82</b>
<b>4.3.3 O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FACILITADORA DA APRENDIZAGEM</b>	<b>85</b>
<b>4.4 POSICIONAMENTO ESTUDANTIL SOBRE O USO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA NO PROCESSO DE ENSINO, SE FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO</b>	<b>92</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>99</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>100</b>
<b>APÊNDICE 1 - QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO</b>	<b>103</b>
<b>APÊNDICE 2 - TESTE DE VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM</b>	<b>104</b>
<b>APÊNDICE 3 - PLANO DE UNIDADE</b>	<b>107</b>
<b>ANEXO 1 - PARECER DO CEP-UNIGRANRIO AO PROJETO DE PESQUISA</b>	<b>109</b>

## INTRODUÇÃO

Em aproximadamente 30 anos de magistério com turmas das últimas séries do ensino fundamental e as três séries do ensino médio, nos foi possível constatar as dificuldades apresentadas pelos alunos durante as aulas de trigonometria, seja trigonometria no triângulo retângulo ou a trigonometria no círculo. Acreditamos que tais dificuldades têm origem em lacunas que vão acumulando desde o ensino fundamental.

Essa experiência de 30 anos de trabalho, nos autoriza a dizer que muitas vezes o professor na sua prática em sala de aula não tem se mostrado um incentivador dos seus alunos. Sabemos que muitos alunos, pela própria natureza da disciplina matemática, têm dificuldade em entender os conteúdos e se apropriar dos conceitos. Nos parece que eles não conseguem articular o que aprendem ao seu cotidiano. Também às perguntas feitas frequentemente pelos alunos com relação aos “por quês?”, isto é, como surgiu isto, como surgiu aquilo, o que evidencia um conhecimento prévio, nem sempre se oferecem respostas, o que contribui, a nosso ver, para que os mesmos tenham pouca ou nenhuma motivação para aprender matemática.

Pensamos que a pouca motivação aumenta a dificuldade dos alunos e já que ninguém gosta de colecionar insucessos, acreditamos que daí vem a aversão e o estigma da matemática como o "bicho papão" dos currículos escolares. Vale ressaltar, novamente, que em nossas práticas docentes temos vivenciado, intensa e ciclicamente, situações marcadas pelo viés aversivo a esse importante campo de conhecimento. Assim, não poderíamos escapar ao estudo propositivo, na perspectiva de dirimir preocupações ou incômodos com os quais se insere nesse cenário. Este foi, pois, o contexto mobilizador do empreendimento ora sinalizado, a questão então orientadora do estudo é: será que o uso da História da Matemática no processo do ensino da trigonometria, nas funções seno e cosseno, pode levar o aluno a ter uma aprendizagem mais significativa?

O nosso objetivo, então, é investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como um elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno. Ainda, como desdobramento, elaborar uma reconstrução histórica e conceitual sobre as funções seno e cosseno, que se constituiu no Ensaio (Souza, Victor e Lopes, 2011); identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre as funções, trigonometria e geometria; utilizar junto aos alunos o Ensaio produzido como aporte facilitador para o desenvolvimento do ensino de

trigonometria e identificar a História da Trigonometria como objeto da aprendizagem das funções seno e cosseno.

Diante do desafio de mudar nossa prática pedagógica e com a intenção em melhorar o ensino, sobretudo, em favor da aprendizagem dos alunos, sentimos a necessidade de produzir um material didático, ao qual chamamos de Ensaio. A produção desse material nos pareceu ser fundamental no sentido de distinguir entre muitas fontes consultadas, o que nos pareceu ser relevante para um ensino da trigonometria

Portanto, dois grandes desafios estão sendo enfrentados por nós. O primeiro é desconstruir o mito de que poucos são capazes de aprender matemática, e o segundo é a aposta hipotética de que uma outra forma de ensinar possibilita que ocorra a melhoria na aprendizagem da trigonometria. Assim, a hipótese de estudo a ser testada por nós, será pautada na seguinte enunciação: O desempenho de estudantes em teste de rendimento, após vivenciar uma prática pedagógica alternativa, será significativamente (do ponto de vista estatístico) maior do que a medida tomada antes da proposta.

Nossa Dissertação de Mestrado é estruturada em quatro capítulos, da seguinte maneira:

No Capítulo 1, fizemos um estudo exploratório de sete dissertações após uma revisão bibliográfica, de tal forma que nos situasse sobre os aspectos e visões detidas por esses sete autores acerca da História da Matemática e como estas acepções refletiram no ensino de trigonometria. Fizemos uma reflexão do ensino da História da Matemática nos PCNs, um estudo sobre o processo de ensino aprendizagem objetivando destacar algumas ideias de autores que nortearam os estudos exploratórios abordados anteriormente e dentro do nosso olhar sobre a aprendizagem significativa meramente funcional e nos focarmos na crítica defendida por Moreira.

Na Capítulo 2, fizemos uma reconstrução histórica, onde se concentra o aprofundamento teórico sobre conteúdos correlatos envolvidos diretamente no estudo. Foi dividido em três seções: a primeira dá realce à importância da História da Matemática; a segunda constitui um estudo introdutório da História da Matemática; e, a terceira um estudo introdutório da História da Trigonometria.

No Capítulo 3, fizemos um estudo pormenorizado da dimensão teórico-metodológica da pesquisa, organizado em cinco seções: a primeira aborda a metodologia da pesquisa utilizada; a segunda concentra-se numa descrição dos sujeitos e do *locus* da pesquisa; a terceira focaliza os instrumentos de coleta de dados; a quarta evidencia as fases de realização da pesquisa e a quinta seção faz uma descrição do Ensaio.

No Capítulo 4, apresentamos os resultados da pesquisa com uma análise das respostas dos alunos às questões objetivas e a questão discursiva integrantes do instrumento que foi utilizado como pré e pós-testes de verificação de aprendizagem; para tanto, mostramos os resultados gerais do pré e do pós-testes com a mediação de procedimento estatístico - teste *t* de Student. Finalmente, apresentamos as manifestações e impressões estudantis ao instrumento que focalizava o Ensaio, e que visava a captar as suas impressões sobre o nível de contribuição desse material, em sua forma e conteúdo. E, nas considerações finais, apresentamos nossas conclusões, considerando que o método utilizado trouxe avanço na aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos então trabalhados.

## **CAPÍTULO 1**

### **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Nesses estudos buscamos então compreender dentro da perspectiva de Moreira (2011), teorias com ênfase na cognição, ou seja, a psicologia cognitiva de Vygotsky, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, a aprendizagem significativa de Ausubel, a teoria de desenvolvimento cognitiva de Piaget e buscar em Pais (2002) uma abordagem mais significativa de aprendizagem na perspectiva de Douady, além de nos apoiarmos nos Parâmetros Curriculares da Matemática.

#### **1.1 - ESTUDO EXPLORATÓRIO**

Diante do contexto social bastante adverso, de ampla aversão estudantil pela matemática, e norteado por preocupação e compromisso com a aprendizagem dos estudantes, nos sentimos desafiados a examinar de perto as raízes e o caráter das dificuldades sentidas pelos alunos, nesse campo de saber. A partir de incursões preliminares pela literatura correlata, um estudo exploratório foi realizado buscando compreender a contribuição e a influência da História da Matemática, especialmente no ensino da trigonometria, estabelecemos um diálogo com autores ligados ao ensino da matemática quando selecionamos no Banco de Teses da Capes, sete estudos relacionados à trigonometria com abordagens diversificadas.

A escolha desses sete estudos se teve pela relação destes com a nossa pesquisa, quanto ao estudo da trigonometria e o uso de História da Matemática em sala de aula. Vários estudos foram feitos nesse contexto, porém esses foram os que mais se aproximaram do nosso estudo e os mais recentes, de 1994 a 2010.

Em Briguenti (1994) há uma preocupação em produzir uma aprendizagem significativa de trigonometria, com foco na teoria ausubeliana.

Com base na teoria ausubeliana, ela procurou construir um mapa conceitual para formar os conceitos de trigonometria, começando, assim, a identificação de dois conceitos fundamentais para a formação dos conceitos trigonométricos: as ideias de semelhança e de proporcionalidade e, também, propôs atividades para serem desenvolvidas nas salas de aula de modo que os alunos medissem, recortassem, desenhassem, enfim, utilizassem as representações gráficas para a construção do conceito que estava sendo estudado. Tais

conceitos foram aplicados para a solução de problemas que aparecessem no cotidiano. A pesquisa de Brighenti teve resultados favoráveis no que tange aos aspectos relativos à aprendizagem dos conceitos trigonométricos.

A sua pesquisa contribuiu, sobretudo, para apontar para a de significado que a abordagem tradicional produzia, e para a busca de uma nova perspectiva, a qual produza significado para o aluno.

Na conclusão de Brighenti, com base na entrevista coletiva com os alunos, observou que os mesmos mantiveram-se motivados e que a maioria gostou da maneira como o assunto foi abordado. Porém, nesta conclusão, não foi constatado se a aprendizagem foi significativa para o aluno.

Costa (1997), em seu estudo objetivou construir uma sequência de ensino para a introdução das funções seno e cosseno e suas transformações, de forma significativa para o aluno e, a partir dela, investigar o tipo de interferência dos contextos computador e mundo experimental na construção desse conhecimento. As ideias teóricas que nortearam a pesquisa de Costa foram de: Piaget, Vygotsky, Vergnaud e Nunes, entre outros.

O contexto experimental consistiu em instrumentos que foram idealizados e produzidos pela autora com ajuda do Instituto de Física, PUC-SP, e o contexto em computador consistiu em atividades produzidas com o uso do programa Cabri-Geomètre. Com base no estudo de Costa, podemos dizer que o campo experimental e /ou uma ferramenta tecnológica, como por exemplo o computador, possibilita a aprendizagem significativa.

O estudo exploratório então realizado possibilitou fomentar a expectativa de analisar a possibilidade de aplicação da História da Matemática como ferramenta didática auxiliar no processo de aprendizagem de trigonometria. Consequentemente, estudar e refletir, sobre os prós e contras do uso da História da Matemática na sala de aula como instrumento motivador das aulas de trigonometria, pareceu um desafio. Nesses estudos buscamos então compreender dentro da perspectiva de Moreira (2011), teorias com ênfase na cognição, ou seja, a psicologia cognitiva de Vygotsky, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, a aprendizagem significativa de Ausubel, a teoria de desenvolvimento cognitiva de Piaget e buscar em Pais (2002) uma abordagem mais significativa de aprendizagem na perspectiva de Douady, além de nos apoiarmos nos Parâmetros Curriculares da Matemática.

Mendes (1997), em sua dissertação, defende a utilização da História da Matemática para o ensino-aprendizagem de noções básicas de trigonometria no ensino médio, partindo de uma concepção construtivista (Piaget, D'Ambrósio), de ensino que se caracterize pela busca do conhecimento por intermédio da realização de atividades que enfoquem aspectos

manipulativos presentes no conteúdo histórico. Mendes pretende, com isso, contribuir para a melhoria das ações docentes, dos professores de matemática, por meio da testagem de uma proposta metodológica voltada para a introdução da trigonometria baseada na redescoberta, apoiada no desenvolvimento histórico da mesma. O objetivo foi verificar o grau de validade dessa proposta juntamente com os professores de matemática que atuam em séries do ensino fundamental e ensino médio e que abordam a trigonometria plana.

Procurou-se então desenvolver um trabalho voltado à preparação dos professores de ensino fundamental e ensino médio com relação à História da Matemática como ferramenta didática. Portanto, trata-se de uma proposta de utilização da história como recurso facilitador do ensino da trigonometria, partindo, assim, das necessidades apontadas pelos professores em relação ao domínio dessas informações, baseando-se em um estudo preliminar que procurou investigar as atitudes, concepções e experiências dos professores quanto ao uso da História da Matemática em sua formação acadêmica e em suas atividades de sala de aula.

A análise das informações sobre o trabalho com os professores o fez perceber a existência de vários pontos em comum com as experiências anteriormente analisadas por ele, confirmando a validade de determinadas atividades. Mendes confirma que a experiência vivenciada por esse grupo foi tão relevante que lhe compeliu a uma mudança na abordagem no ensino de trigonometria para o nono ano e o ensino médio. A falta de conhecimento histórico do grupo foi superada à medida que eles iam realizando as atividades e discutindo com os professores-estudantes.

Analisando os depoimentos dos participantes, ficou evidente que o curso mostrou a todos a importância das atividades históricas na introdução dos conceitos iniciais de trigonometria, em sala de aula.

Na análise de Mendes, tais indicadores (ou fatores) de alteração de desempenho, tanto do lado do professor, quanto do de seus alunos, implica que os trabalhos de ensino similares aos focalizados pela experiência que realizou, ou seja, tais estratégias de ensino podem ser utilizadas em qualquer outro tópico matemático do ensino Fundamental e Médio. Só depende do professor em tornar-se um facilitador de aprendizagens.

Apontamos a dissertação de Lindegger (2000), que teve como objetivo a investigação de uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, para introduzir os conceitos das razões trigonométricas, que são seno, cosseno e tangente, a partir da manipulação de modelos.

Ele trabalhou com duas turmas do ensino fundamental onde considerou uma como grupo de referência e outra como grupo experimental. Foi aplicada na turma do grupo

experimental, a sequência de ensino objeto da sua pesquisa, com pressupostos teóricos construtivistas, com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud, e na didática francesa de Brousseau.

Ambos os grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes e outro depois. O objetivo da aplicação destes testes era o de acompanhar a evolução dos grupos durante a experiência para se fazer uma comparação quantitativa entre os dois grupos efetuando, em seguida, a análise da eficácia da sequência de ensino.

Os resultados alcançados com essa pesquisa apontaram para um melhor desempenho e evolução do grupo experimental, sobretudo em situações contextualizadas. O aluno conseguiu desenvolver com mais propriedade as competências para a resolução de problemas sob a abordagem escolhida pela sequência de ensino. Isso levou o autor a concluir, portanto, que os processos de construção dos conceitos básicos da trigonometria ganham significados mais abstratos e abrangentes quando estão inseridos na resolução de problemas concretos.

Na dissertação de Silva (2005) o objetivo foi de investigar uma abordagem de ensino da trigonometria no triângulo retângulo, onde se pretendeu introduzir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

A pesquisa de Silva surgiu com o estudo de uma abordagem que fosse mais significativa para o processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo. Mediante isso, o autor optou pela Engenharia Didática como metodologia. Os referenciais teóricos são a dialética ferramenta-objeto (Douady, 1991) e os registros de representação semióticos, sobretudo no que diz respeito ao tratamento figural (Duval, 1995).

Como resultado final, o autor relata que observando os relatos de aplicação das atividades contidas na análise a posteriori, ficou claro que houve dificuldade na apreensão perceptiva das situações propostas (o aluno não identificava a estratégia de solução do problema proposto), causando ineficiência na apreensão operatória. Acredita o autor que, para amenizar essas dificuldades, seria interessante aliar a essa sequência um contexto e um ambiente que ajudassem na exploração dessas situações. Segundo Silva, não houve a articulação entre contexto e ambiente, isto é, poderiam ter sido construídas maquetes que representassem figuras planas ou espaciais, ou mesmo utilizado o ambiente computacional para que os alunos interagissem mais no tratamento figural e o esquema de apreensão perceptiva em situações concretas.

Nesse sentido, pensa o autor que a sua questão de pesquisa poderia ter sido reformulada a fim de possibilitar uma melhor eficácia nos esquemas de apreensão figural, especialmente as apreensões perceptivas e operatórias.

Oliveira (2006), em sua dissertação mostra a necessidade de adequação dos currículos a uma nova realidade. Por isso, o critério utilizado consiste na recorrência à contextualização e à interdisciplinaridade, facilitando o trabalho com temas abordados, os quais permitam conexões dentro da própria Matemática e da Matemática com outras ciências.

O objetivo geral foi verificar o caráter e a especificidade das dificuldades sentidas pelos professores e alunos nos processos de ensino e aprendizagem de trigonometria baseados em sequências de atividades.

Oliveira empregou, inicialmente, nesta pesquisa, o estudo de alguns trabalhos relacionados com a trigonometria. A seguir, ele identificou o problema da pesquisa e elaborou uma sequência de atividades de trigonometria que foram aplicadas em uma turma do ensino médio. Ele elegeu a Engenharia Didática como metodologia da sua pesquisa. Ele concluiu que o uso de atividades no ensino produz resultados positivos para a aprendizagem e para o desenvolvimento de competência no educando. Tal formulação faz eco à manifestação de outros autores, inclusive Iran Mendes, que tem dois de seus trabalhos por Oliveira citados, com os quais mantém sintonia.

No estudo de Sampaio (2008) o objetivo foi de investigar a construção de uma abordagem histórico-filosófica para o ensino do ciclo trigonométrico no Ensino Médio. O autor pesquisou em diversas fontes para fundamentar a construção histórico-filosófica do conteúdo de trigonometria, como por exemplo, Crombie, Cajori, Smith, Zeller, entre outros, utilizou também a metodologia da Engenharia Didática. Acredita Sampaio que, as hipóteses iniciais da sua pesquisa, foram validadas e os resultados da investigação foram corroborados com os referenciais teóricos que defendem o uso da História da Matemática para promover aos alunos a aprendizagem de conteúdos e valores.

Sampaio considerou significativos os resultados da sua investigação nas explorações epistemológicas de pesquisa em Educação Matemática, pois foi elaborado um material didático que pode ser aplicado em sala de aula, contribuindo para os estudos da matemática. A sua dissertação mostrou que é possível introduzir nas aulas a contextualização histórica, articulando teoria e prática, salientando a necessidade de se adaptar as informações históricas às necessidades, desenvolvendo saberes e produzindo conhecimentos. Segundo o mesmo autor, seus objetivos foram alcançados, as adequações foram realizadas inovando aspectos metodológicos do conteúdo de trigonometria aos alunos do Ensino Médio, o que possibilitou que a aplicação da sequência didática construída gerasse conhecimento matemático escolar, portanto, ocorreu a aprendizagem do conteúdo trigonometria.

## 1.2 - O ENSINO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS PCN's

Refletir sobre o ensino da História da Trigonometria nos PCN's nos impulsiona a refletir historicamente sobre o processo de elaboração dos mesmos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), para melhor nos situar é importante lembrar da trajetória das reformas curriculares ocorridas nas décadas de 60/70, onde o ensino da Matemática, em diferentes países, foi influenciado por um movimento que ficou conhecido como Matemática Moderna.

Os formuladores dos currículos dessa época insistiam na necessidade de uma reforma pedagógica, incluindo a pesquisa de materiais novos e métodos de ensino renovados, o que desencadeou a preocupação com a Didática da Matemática, intensificando a pesquisa nessa área.

O ensino passou, então, a ter preocupação excessiva com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A constatação da inadequação de alguns dos princípios do movimento da Matemática Moderna e das distorções ocorridas na sua implantação influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, a partir dos anos 80.

No Brasil, também, essas ideias vêm sendo discutidas e algumas aparecem incorporadas pelas propostas curriculares de Secretarias de Estado e Secretarias Municipais de Educação, com experiências bem sucedidas. (BRASIL, 1997)

Até dezembro de 1996 o ensino básico esteve estruturado nos termos previstos pela Lei Federal n. 5692, de 11 de agosto de 1971, que estabelece, como objetivo geral, proporcionar aos educandos a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização, preparação para o trabalho e para o exercício consciente da cidadania. (BRASIL, 2000)

O processo de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais teve início a partir do estudo de propostas curriculares de Estados e Municípios, da análise realizada pela Fundação Carlos Chagas sobre os currículos oficiais e do contato com informações relativas a experiências de outros países. Este processo começou em 1995, sendo que no fim daquele ano já havia a versão preliminar, que foi apresentada a diferentes especialistas e instituições. Como resposta, o Ministério da Educação recebeu aproximadamente setecentos pareceres, que foram catalogados por áreas temáticas que embasaram a revisão do texto. (BRASIL, 2000)

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ( Lei Federal n. 9394 ), aprovada em 20 de dezembro de 1996, consolida e amplia o dever do poder público para com a

educação em geral e, em particular, para com o ensino fundamental. Além disso, a Lei de Diretrizes e Bases criou, para o ensino fundamental e médio, um núcleo comum obrigatório no âmbito nacional, que inclui o estudo de língua portuguesa, matemática, do mundo físico, da realidade política e social, da arte e educação física. Dentro desta proposta nacional comum, cada estado, município ou escola pode propor seu próprio currículo, contemplando as peculiaridades locais e a especificidade dos planos dos estabelecimentos de ensino e as diferenças individuais dos alunos. Por conta disso, a LDB consolida a organização curricular de modo a conferir uma maior flexibilidade no trato das componentes curriculares, reafirmando desse modo o princípio da base nacional comum ( que vem a ser Parâmetros Curriculares Nacionais ), a ser complementada por uma parte diversificada em cada sistema de ensino e escola na prática. (BRASIL, 2000)

Todavia, o que se observa é que os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa são, ainda, bastante desconhecidos por parte considerável dos professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. Parte dos problemas referentes ao ensino da Matemática estão relacionados com a formação de professores, cujas práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. Estes problemas acabam sendo responsáveis por muitos equívocos e distorções em relação aos fundamentos norteadores e ideias básicas que aparecem em diferentes propostas. Nem sempre são observadas as recomendações feitas no sentido de que conteúdos são veículos para o desenvolvimento de ideias fundamentais e devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio. (BRASIL, 2000)

É possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazer a organização dos conteúdos. Tal organização é denominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Matemática, que desconsidera, em parte, as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-los. Geralmente, é desconsiderada, também, a importância de se levar em conta o "conhecimento prévio" dos alunos na construção de significados. Na maioria das vezes, parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal. (BRASIL, 2000)

Outra postura que leva ao empobrecimento do trabalho, produzindo efeito contrário ao de enriquecer o processo ensino-aprendizagem é a de que temos uma ideia equivocada de

"cotidiano", trabalhando-se somente com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Assim sendo, muitos conteúdos importantes são descartados.

A História da Matemática vem sendo apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência.

O uso de recursos didáticos, incluindo alguns materiais específicos, é recomendação feita em quase todas as propostas curriculares. Na prática, no entanto, nem sempre há clareza do papel dos recursos didáticos no processo ensino-aprendizagem.

Podemos concluir, assim, que há problemas antigos e novos a serem enfrentados e solucionados, tarefa que requer operacionalização efetiva das intenções anunciadas nas diretrizes curriculares dos anos 80 e início dos 90, e a inclusão de novos elementos à pauta de discussões.

Conforme suas necessidades cotidianas, o aluno desenvolve uma inteligência essencialmente prática, que lhe permite desenvolver uma vasta capacidade para lidar com a atividade matemática. A aprendizagem do aluno apresenta melhor resultado, quando essa capacidade é potencializada pela escola.

É necessário, ao aluno, relacionar ideias matemáticas entre si, e perceber que processos como o estabelecimento de relações são tão importantes quanto a exploração dos conteúdos matemáticos.

Através da História da Matemática, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático, mostrando necessidades e preocupação de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e estabelecendo comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. A História da Matemática em conexão com conceitos abordados pode constituir-se em veículos de informação cultural, social e antropológica de grande valor informativo. (BRASIL, 1997)

Na vida contemporânea, a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda de cidadãos capazes de aprender, continuamente, para o que é essencial, uma formação geral e não apenas um treinamento específico.

O aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas, também, para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. Ele não deve ser centrado na interação individual de alunos com materiais instrucionais, nem se resumir à exposição de alunos ao

discurso professoral, mas se realizar pela participação ativa de cada um e do coletivo educacional numa prática de elaboração cultural.

Conforme registrado nos PCN's, a disciplina Matemática:

(...) no Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (BRASIL, 1998, p. 9)

Conforme Baroni, Teixeira e Nobre (2005) tem sido crescente, nos últimos anos, a produção científica na área que relaciona História e Educação Matemática, quer seja na pesquisa sobre os possíveis usos didáticos da História da Matemática, quer seja na área de História da Educação Matemática, com ou sem vínculo explícito com o Ensino de Matemática.

Tais pesquisas têm envolvido professores e alunos de pós-graduação, com grande repercussão em termos de publicações e projetos de pesquisa com apoio de instituições de fomento, obtendo resultados em diversos campos, tais como História Institucional da Cultura Matemática, História da Matemática pedagogicamente valorizada, História das Disciplinas Escolares, História do Livro Didático, História das Instituições, bem como na constituição e disponibilização de arquivos pessoais e de materiais escolares. Como podemos observar nas palavras de Baroni, Teixeira e Nobre:

Um grande número de artigos vem aparecendo, contendo reflexões e experiências, e observa-se que vários são os argumentos a favor de incluir a História da Matemática no ensino da Matemática. Os mais comuns são que a História da Matemática fornece uma boa oportunidade para desenvolver nossa visão de “o que é a Matemática” ou que a História da Matemática nos permite ter uma compreensão melhor dos conceitos e teorias. (BARONI, TEIXEIRA e NOBRE, 2005, p.165)

A História da Matemática pode estar presente na sala de aula em vários contextos diferentes, pode ser apresentada de forma lúdica com problemas curiosos “os enigmas”, como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades

complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo. Também pode apresentar a matemática com uma gama de atividades diferenciadas que vão muito além das infundáveis sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas. Com a História da Matemática, temos a possibilidade de buscar uma forma de ver e entender a matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. Por meio da História da Matemática, podemos verificar que a matemática é uma construção humana, foi sendo desenvolvida ao longo do tempo e, por assim ser, permite compreender a origem das ideias que deram forma à cultura, como também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que criaram essas ideias e as circunstâncias em que se desenvolveram. (BRASIL, 1997)

Os PCN's de matemática indicam a História da Matemática, mediante um processo de transposição, como um dos recursos que os professores podem lançar mão em sala de aula e que pode contribuir com o processo de ensino aprendizagem.

Conforme os PCN's, este recurso permite:

(...)compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos da ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1998, p. 23)

Ainda com relação aos PCN's

Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42)

Antecipando-se às formulações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Sad (2004, p.

4) afirma que o uso da história no ensino de matemática é importante porque

(...) aumenta a motivação para aprendizagem; tem ação problematizadora, utilizando em especial o diálogo; articula matemática com outras ciências; mostra a importância da notação simbólica (linguagem) na constituição das formas e estruturas matemáticas, no processo histórico de construção dos objetos matemáticos por diversas culturas e situa a matemática cronologicamente: em relação aos produtos e a sua própria constituição, para poder compreender as condições de sua produção.

### 1.3 – REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Objetivamos com a presente reflexão destacar algumas ideias de autores que nortearam os estudos exploratórios abordados no item anterior. A fundamentação teórica desses estudos, destaca a psicologia cognitiva que se preocupa com a aquisição do conhecimento e o processo de formação de conceitos, buscando entender as questões psicológicas ligadas ao raciocínio humano. Todas essas leituras estão baseadas em Moreira (2011). Vale assinalar que dos seis autores apresentados, as reflexões são baseadas na obra de Moreira, exceto Douady que, numa visão dialética, entende a matemática como um objeto cultural quando discute a produção de conceitos para o aluno através da sua solução de problemas. Com o objetivo de orientar o leitor, organizamos o presente item em duas partes: na primeira apresentamos na visão de Moreira (2011), Costa (1997), Pais (2002), Silva (2005) e Lage (2006), algumas reflexões sobre os cinco autores mencionados anteriormente. Na segunda parte, apresentamos, com base em Moreira, o nosso olhar sobre a aprendizagem significativa.

Inicialmente, partimos de Vygotsky que parte da premissa que o desenvolvimento cognitivo não pode ser entendido sem referência ao contexto social e cultural no qual ele ocorre. Ele acredita na construção ativa do sujeito, nas fases de desenvolvimento, ele defende que a aprendizagem caminha à frente do desenvolvimento, servindo-lhe de guia. Moreira acrescenta que na perspectiva de Vygotsky, a educação não fica à espera do desenvolvimento intelectual do sujeito. Ao contrário, sua função é levá-lo adiante, pois quanto mais ele aprende, mais se desenvolve mentalmente.

Vygotsky enfoca a interação social. Sua unidade de análise não é nem o indivíduo nem o contexto, mas a interação entre eles. A interação social é, portanto, na perspectiva Vygotskyana, o veículo fundamental para a transmissão dinâmica (de inter para intrapessoal) do conhecimento social, histórico e culturalmente construído. (MOREIRA, 2011, p.110)

Moreira (2011) ressalta uma outra ideia importante de Vygotsky, que diz respeito à Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). O conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal é definido como a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial.

Do ponto de vista da instrução, esse conceito compreende os aspectos centrais da sua teoria. É por meio dele que Vygotsky demonstra como um processo interpessoal (social) se transforma num processo intrapessoal (psíquico). Ao descrever essa passagem do social para o individual, ele destaca a importância da experiência partilhada, da comunhão de situação, do

diálogo, da colaboração, concebendo desse modo, o aprendizado como um processo de trocas e, portanto, verdadeiramente social. Nessa perspectiva, compreendemos que a História da Trigonometria por aguçar a curiosidade, possibilita ao professor e ao aluno uma postura mais ativa diante do processo de ensino.

Continua Moreira destacando que em outras perspectivas teóricas, o desenvolvimento cognitivo tem sido interpretado como necessário para a aprendizagem mas, na teoria de Vygotsky, a aprendizagem é que é necessária para o desenvolvimento, assim :

O único bom ensino é aquele que está à frente do desenvolvimento cognitivo e o dirige. Analogamente, a única boa aprendizagem é aquela que está avançada em relação ao desenvolvimento. A aprendizagem orientada para níveis de desenvolvimento já alcançados não é efetiva, do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo do aprendiz. (MOREIRA, 2011, p.118)

O principal componente inovador da teoria de Vygotsky é a incorporação de fatores sociais na formação de conceitos. Nele os conceitos vão sendo formados individualmente por cada sujeito até atingirem o estágio de pseudoconceitos. Nesta fase é a mediação da cultura que permite uma nova convergência dos pseudoconceitos em direção a conceitos compartilhados por um certo agrupamento humano. Sem este papel mediador, os pseudoconceitos evoluiriam em direções arbitrárias, não permitindo a vida social.

Segundo Moreira (2011) a teoria de Vygotsky é construtivista , pois o indivíduo, através de construções sócio-históricas e culturais, se desenvolve cognitivamente, havendo, assim, uma interação social que é o veículo fundamental para a transmissão dinâmica do conhecimento social construído.

Na obra de Piaget, em função de uma ampla abordagem, Moreira (2011) destaca quatro períodos de desenvolvimento cognitivo: sensório- motor, pré-operacional, operacional concreto e operacional formal e alguns conceitos chaves tais como; assimilação, acomodação e equilíbrio.

Continua Moreira que no período sensório- motor vai do nascimento até próximo aos dois anos de idade. Deste estágio, característico do recém-nascido, a criança evolui cognitivamente.

O período pré-operacional vai dos dois aos seis ou sete anos. O pensamento da criança começa a se organizar, mas não é ainda reversível, ou seja, não é capaz de percorrer um caminho cognitivo e, após, percorrê-lo mentalmente em sentido inverso, de modo a reencontrar o ponto de partida não modificado.

No período operacional-concreto, dos sete ou oito anos, se estende até onze ou doze anos, verifica-se uma descentração progressiva em relação à perspectiva egocêntrica que caracterizava a criança até então. “O pensamento da criança, agora mais organizado, possui características de uma lógica de operações reversíveis” ( MOREIRA , 2011, p.97 )

A partir dos onze ou doze anos, e se estendendo até a fase adulta, dá-se o período das operações formais. Neste período há a capacidade de raciocinar com hipóteses verbais e não apenas com objeto concreto. É o pensamento proposicional, por meio do qual o adolescente, ao raciocinar, manipula proposições. O ponto de partida é a operação concreta; porém o adolescente transcende este estágio: formula os resultados das operações concretas sob a forma de proposição e continua a operar mentalmente com eles.

Acrescenta Moreira que, para Piaget, o crescimento cognitivo da criança se processa por assimilação, acomodação e equilíbrio. A assimilação é o processo cognitivo de classificar novos eventos em esquemas existentes. É a incorporação de elementos do meio externo a um esquema do sujeito, isto é, é o processo pelo qual o indivíduo capta o ambiente e o organiza possibilitando, assim, a ampliação de seus esquemas. Na assimilação o indivíduo usa as estruturas que já possui. Acomodação é a modificação de um esquema em função das particularidades do objeto a ser assimilado. A equilíbrio é o processo de passagem do desequilíbrio. Para Piaget, todo ser vivo procura o equilíbrio que permite a adaptação através de processos de auto-regulação. O desequilíbrio é, na verdade, perturbações que resultam de conflitos momentâneos, os quais uma vez ultrapassados ou superados conduzem a novas construções.

Para Moreira,

Esse processo reequilibrador é chamado por Piaget de equilíbrio majorante, é o fator preponderante na evolução, no desenvolvimento mental, na aprendizagem (aumento de conhecimento) da criança. É por meio do processo de equilíbrio majorante que o comportamento humano é, totalmente, construído em interação com o meio físico e sócio-cultural; o comportamento humano (motor, verbal e mental) não tem, portanto, segundo Piaget, padrões prévios hereditários. (MOREIRA, 2011, p. 102)

Assim, para Piaget, o conhecimento não pode ser aceito como algo predeterminado desde o nascimento. Resulta das ações e interações do sujeito com o ambiente onde vive. Todo conhecimento é uma construção que vai sendo elaborada desde a infância, através da interação sujeito com os objetos que procura conhecer, sejam eles do mundo físico ou cultural.

As implicações dessas proposições são de grande importância para o ensino. Ensinar significa provocar o desequilíbrio na mente do ser para que, ele, busque a equilibração majorante, se reestruture cognitivamente e aprenda. A teoria de Piaget não é uma teoria de aprendizagem e sim uma teoria de desenvolvimento mental, conforme Moreira, (2011)

Moreira (2011) destaca aqui apenas os períodos de desenvolvimento cognitivo e alguns conceitos-chaves que dão uma visão geral da obra de Piaget, mostrando que suas propostas configuram uma teoria construtivista do desenvolvimento cognitivo humano.

Outro autor destacado por Moreira (2011) é Vergnaud (1994) que tem como referência o próprio conteúdo de conhecimento e a análise conceitual do domínio desse conhecimento, no que diz respeito à teoria das operações lógicas gerais, das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-situação”.

Aparenta Moreira que Vergnaud (1994) é um autor que atribui grande importância à conceitualização e, nela, à linguagem. Para ele o estudo do desenvolvimento de um conceito requer que o pesquisador veja esse conceito como uma terna de conjuntos:

$C = (s, I, S)$ , onde,

$C \rightarrow$  conceito

$s \rightarrow$  conjunto de situações que dão sentido ao conceito; é a realidade, o contexto

$I \rightarrow$  conjunto de invariantes (objetos, propriedades, relações e procedimentos) que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações; é o significado.

$S \rightarrow$  conjunto de representações simbólicas para se referir aos invariantes e às situações, em especial aos procedimentos para lidar com eles, é o significante. (LINDEGGER, 2000)

Vergnaud parte do princípio de que o conhecimento está organizado em *campos conceituais* cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um longo período de tempo, pela experiência, maturidade e aprendizagem. Para ele, para que a obtenção do conhecimento ocorra, deve haver uma interação com o objeto de estudo em diversas situações, para que o aluno observando-o possa perceber os invariantes desse objeto. O aluno, para tanto, deveria fazer uso de vários conceitos correlatos, chegando a uma representação simbólica e formando o conceito do objeto em estudo, no final do processo.

A teoria dos campos conceituais é uma proposta didática para a construção do saber escolar, de forma a repensar as condições da aprendizagem conceitual com o objetivo de torná-lo mais acessível ao aluno. Esta teoria estuda as adaptações que o aluno realiza sob a influência de situações que este vivencia dentro e fora da escola.

Uma dificuldade para os pesquisadores está no fato de que um simples conceito não se refere apenas a um tipo de situação, assim como uma simples situação não pode ser analisada

através de um único conceito. Não faz sentido, portanto, estudar conceitos isoladamente, mas sim dentro de campos conceituais.

Segundo Moreira,

O conceito de situação empregado por Vergnaud não é o de situação didática, mas sim o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas envolvidas, mas é claro que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global. (MOREIRA, 2011, p. 211)

Para Vergnaud, um conceito torna-se significativo mediante uma variedade de situações, porém o sentido não está nas situações em si mesmas e nem nas palavras, nem nos símbolos. O sentido é uma relação do sujeito com situações e significantes. Mais precisamente, são os esquemas, isto é, as ações e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo. Vergnaud considera que os esquemas se referem, necessariamente, a situações, de modo que se deveria falar em interação esquema-situação em vez de interação sujeito-objeto.

Na opinião de Moreira,

A teoria de Vergnaud tem forte base piagetiana se manifestando principalmente no importante papel que o conceito de esquema tem nessa teoria. Vergnaud tem, também, influência vygotskyana pois acredita que o professor é um importante mediador no processo de ajudar o aluno a desenvolver seu repertório de esquemas e representações. Um conceito, ou uma proposição, torna-se significativo mediante uma variedade de situações, porém não se capta o significado sozinho, é necessário o papel do professor mediador. (MOREIRA, 2011, p.220)

Para Vergnaud, a resolução de problemas é parte integrante do processo de formação de conceitos, ou seja, o conceito e a competência se formam a partir desta resolução. Em síntese, a teoria dos campos conceituais para Vergnaud é uma teoria psicológica cognitivista que supõe que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização do real (1996a, p.118 apud MOREIRA, 2011, p.219). Para ele o domínio de um campo conceitual deve ocorrer ao longo de vários anos, pois assim o aluno vai progressivamente dominando-o. Por isso a importância do professor com a função de mediador para que haja um progressivo domínio do campo conceitual pelo aluno.

Em seus estudos, Moreira (2011) também destaca a aprendizagem significativa na concepção de Ausubel. Conforme o mesmo autor, a estrutura cognitiva tal como apresentada por Ausubel

é entendida como o conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou, conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular, ou seja, dos processos por meio dos quais se adquire e utiliza o conhecimento. O conceito central da teoria de Ausubel é o de aprendizagem significativa. Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. (MOREIRA, 2011, pp.160-161)

Para Moreira (1982, p.104) trata-se da ideia-âncora, ou seja, da ideia, conceito ou proposição mais ampla, subordinadora de outras e, nesse processo de assimilação “o próprio subsunçor é modificado e diferenciado”. Tal conceito é fundamental na compreensão e na organização sequencial dos mapas conceituais – diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual do todo ou de partes de uma disciplina.

O subsunçor é um conceito, uma ideia, uma proposição já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de ancoradouro a uma nova informação de modo que esta adquira, assim, significado para o indivíduo, isto é, que ele tenha condições de atribuir significados a essa informação (MOREIRA, 2006, p.15).

Nessa perspectiva, para que uma aprendizagem seja significativa, o novo conteúdo deve estar relacionado a conteúdos prévios importantes do aprendiz, ou seja, a conceitos subsunçores relevantes.

Nas palavras de Moreira (2006)

Em contraposição com a aprendizagem significativa, Ausubel define aprendizagem mecânica como sendo aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligarem-se a conceitos subsunçores específicos. (MOREIRA, 2006, p.16)

Na teoria de Ausubel são distinguidos três tipos gerais de aprendizagem: cognitiva, afetiva e psicomotora. Para Moreira (2011)

Aprendizagem cognitiva é aquela que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, e esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva; a aprendizagem afetiva resulta de sinais internos ao indivíduo e

pode ser identificada com experiências tais como prazer e dor, satisfação e descontentamento, alegria ou ansiedade e a aprendizagem psicomotora envolve respostas musculares adquiridas por meio de treino e prática, mas alguma aprendizagem cognitiva é geralmente importante na aquisição de habilidades psicomotoras. (MOREIRA, 2011, p.159)

Na visão clássica de Ausubel, o material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo, ou seja, capaz de relacionar-se à estrutura cognitiva do aprendiz. Um material que não tenha essa característica pode se tornar potencialmente significativo por meio de Organizadores Prévios, cuja função é fazer a mediação entre o que o estudante sabe e o que pretende aprender. Além disso, é necessário um mínimo de conteúdo na estrutura cognitiva do indivíduo, com os quais o novo material é relacionável; e o aprendiz precisa se dispor a aprender, ou seja, relacionar o novo material potencialmente significativo à sua estrutura cognitiva. (AUSUBEL, 2000, p.1)

Da teoria de Ausubel, infere Moreira (2006) que, para implementar esta teoria em sala de aula, é necessário ao professor:

Identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino. Isto é, identificar os conceitos e os princípios unificadores, inclusivos, com maior poder explanatório e propriedades integradoras, e organizá-los hierarquicamente de modo que, progressivamente, abranjam os menos inclusivos até chegar aos exemplos e dados específicos; identificar quais os subsunçores (conceitos, proposições e ideias claras, precisas, estáveis), relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, que o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva para poder aprender significativamente este conteúdo; diagnosticar o que o aluno já sabe; distinguir dentre os subsunçores especificamente relevantes (previamente identificados ao mapear e organizar a matéria de ensino) quais os que estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno; e ensinar utilizando recursos e princípios que facilitem a passagem da estrutura conceitual da matéria de ensino para estrutura cognitiva do aluno de maneira significativa. (MOREIRA, 2006, pp. 169-171)

Portanto, a implementação de tal teoria não é tarefa fácil e requer conhecimento por parte dos professores. A principal estratégia que Ausubel (2000) menciona para facilitar a aprendizagem significativa é o uso de organizadores prévios. “Um organizador prévio é um mecanismo pedagógico que estabelece uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa saber”. (AUSUBEL, 2000, p. 11; apud CAJAZEIRAS, 2011, p.42).

Organizadores prévios facilitam a passagem da estrutura conceitual da matéria de ensino para a estrutura cognitiva do aluno de maneira significativa. Podem ser textos escritos, uma demonstração, um vídeo, um filme, ou até um jogo didático, dependendo da situação de

aprendizagem, e devem funcionar como “pontes cognitivas” (MOREIRA, 2006, p.23; apud CAJAZEIRAS, 2011, p.42).

Os organizadores prévios devem ser construídos levando-se em consideração os conteúdos a serem abordados, os principais conceitos, as ideias mais importantes e as mais gerais para que se possa, assim, identificar o conhecimento prévio.

É preciso saber diferenciar organizadores prévios de pseudo-organizadores, pois, estes, são usados para introduzir elementos que vão facilitar a aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados.

Dando continuidade a nossa reflexão com base nos cinco autores destacados, focalizamos, também, de acordo com Costa (1997), Pais (2002), Silva (2005) e Lage (2006), as ideias de Douady, que abordam a noção de ferramenta objeto e sua relação dialética na produção de conceitos para o aluno. Segundo Douady, na visão dos autores citados, um objeto pode ser uma ferramenta de exploração de novo conceito para a solução de um problema.

Segundo Lage,

A dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Douady (1984) embasa-se em pesquisas sobre o desenvolvimento de noções matemáticas utilizadas por alunos a partir da resolução de seqüências de atividades, considerando o pressuposto de que as noções e teoremas matemáticos que eles utilizam são ferramentas. Através da caracterização desses teoremas e noções como parte integrante de um corpo reconhecido social e cientificamente, e da conseqüente constituição de definições, enunciações e demonstrações de teoremas desse corpo, têm-se os objetos”. (DOUADY, 1984, apud LAGE, 2006, p. 12)

A dialética ferramenta-objeto de Douady, que é o processo de resolução de problemas, se desenvolve em diversas fases, assim denominadas: antigo, pesquisa, explicitação, institucionalização, familiarização e novo problema.

Na fase, denominada antigo, os alunos mobilizam conhecimentos antigos, que são objetos de saber matemático com estatuto de ferramentas, para resolver problemas, ao menos em parte.

Na fase que é denominada pesquisa, os alunos tendem a utilizar novos conhecimentos diante das dificuldades encontradas para resolver o problema por completo. Surgem, então, durante esta fase, novos questionamentos que levam os alunos a buscar novos meios de resolução. Nesta fase, havendo dificuldades para se resolver completamente o problema, os alunos são conduzidos a pesquisar outros meios que se adaptem à situação.

Na terceira fase, que se denomina explicitação, o professor pode, através da exposição dos trabalhos realizados pelos alunos, mostrar as dificuldades e os resultados obtidos, criar

debates sobre os conhecimentos antigos e sobre os novos, levando, assim, os alunos a reconhecerem procedimentos corretos e refletirem sobre os incorretos.

Nesta quarta fase, que é a institucionalização, os novos conhecimentos são institucionalizados como objetos de saber matemático. Aqui, cada aluno pode validar ou não os novos conhecimentos adquiridos anteriormente, valendo-se das condições propiciadas a ele.

Na quinta fase, denominada familiarização, os problemas propostos aos alunos destinam-se a desenvolver hábitos e práticas, a integrar o saber social com o saber do aluno, para que o mesmo coloque à prova os conhecimentos que julga ter alcançado e esclarecer, para si mesmo, o que realmente sabe.

Na fase de número seis, que é o novo problema, os novos conhecimentos adquirem o estatuto de antigos, num novo ciclo da dialética ferramenta-objeto. Aqui os alunos são colocados à prova, para utilizarem os novos conhecimentos, sejam eles conhecidos ou visados pela aprendizagem, em situações mais complexas.

Considerando o quadro teórico de Douady (1984), segundo Lage (2006), ressalta-se que uma situação de aprendizagem é caracterizada por um problema e por uma certa organização de trabalho, adaptada aos objetivos visados. Desse fato depreende-se que os conhecimentos advêm da interação dos participantes da pesquisa com as atividades propostas, resolvidas por eles, e da interação entre eles. Esse processo lhes proporciona a mobilização dos conhecimentos adquiridos anteriormente, assim como possíveis modificações, ampliações e rejeições desses conhecimentos.

#### **1.4 O NOSSO OLHAR SOBRE A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Neste trabalho intencionamos superar a visão clássica de aprendizagem meramente funcional, e focarmos numa aprendizagem significativa crítica defendida por Moreira (2011).

Partimos do diálogo com Freire (1996) que nos ajuda a refletir sobre o significado de ensinar e aprender. Essa reflexão nos parece que põe em questão as incertezas do sujeito que ao mesmo tempo que ensina, aprende. As incertezas são, portanto, movimentos do processo de construção do conhecimento que se dá a partir das perguntas que fazemos e respostas que buscamos sobre as coisas do mundo.

De acordo com Freire:

Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto, um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender (...). Ensinar inexiste sem aprender e vice-versa e

foi aprendendo socialmente que, historicamente, mulheres e homens descobriram que era possível ensinar... (FREIRE, 1996, p.23)

Quando ensinar exige criticidade, o ingrediente que possibilita a passagem da ingenuidade para a criticidade, portanto da conquista progressiva da humanização é a afetividade, a amorosidade pela qual o educador realiza este processo de estímulo e promoção da superação do educando através de suas próprias capacidades criativas.

Segundo Freire,

A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos. Como manifestação presente à experiência vital, a curiosidade humana vem sendo histórica e socialmente construída e reconstruída. Precisamente porque a promoção da ingenuidade para a criticidade não se dá automaticamente, uma das tarefas precípuas da prática educativo-progressista é exatamente o desenvolvimento da curiosidade crítica, insatisfeita, indócil. (FREIRE, 1996, p. 32)

O professor, quando entra em sala de aula, deve estar aberto à indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, as suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tem – a de ensinar e não a de transferir conhecimento. Ensinar não é só transferir conhecimento mas, também, testemunhá-lo e vivenciá-lo, não só pelos educandos, como também pelos educadores.

Para Freire

Pensar certo – e saber que ensinar não é transferir conhecimento é fundamentalmente pensar certo – é uma postura exigente, difícil, às vezes penosa, que temos que assumir diante dos outros e com os outros, em face do mundo e dos fatos, ante nós mesmos. É difícil, não porque pensar certo seja forma própria de pensar de santos e de anjos e a que nós arrogantemente aspirássemos. É difícil, entre outras coisas, pela vigilância constante que temos de exercer sobre nós próprios para evitar os simplismos, as facilidades, as incoerências grosseiras. É difícil porque nem sempre temos o valor indispensável para não permitir que a raiva que podemos ter de alguém vire raivosidade que gera um pensar errado e falso. (FREIRE, 1996, p. 49)

O exercício da curiosidade convoca à imaginação, à intuição, às emoções, à capacidade de conjeturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto ou do achado e de sua razão de ser.

O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou

enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos.

Ainda nas palavras de Freire,

Neste sentido, o bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até a intimidade do *movimento* de seu pensamento. Sua aula é assim um desafio e não uma “cantiga de ninar”. Seus alunos *cansam*, não *dormem*. Cansam porque acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas. Antes de qualquer tentativa de discussão de técnicas, de materiais, de métodos para uma aula dinâmica assim, é preciso, indispensável mesmo, que o professor se ache “repousado” no *saber* de que a pedra fundamental é a curiosidade do ser humano”. (...) “O exercício da curiosidade a faz mais criticamente curiosa, mais metodicamente “perseguidora” do seu objeto. Quanto mais a curiosidade espontânea se intensifica, mas, sobretudo, se “rigoriza”, tanto mais epistemológica ela vai se tornando. (FREIRE, 1996, p. 86)

Pensamos assim que o ensino exige contínua busca, indagações, constatações, intervenções, comunicação de novidades que não se enquadram em um único livro texto, e ao uso exclusivo do quadro de giz. O uso do livro texto e do quadro de giz simboliza o ensino transmissível no qual o professor, muitas das vezes, “resolve exercícios, para que os alunos copiem na véspera da prova e nela repitam o que conseguem lembrar” (MOREIRA, 2011, p.239)

Acrescenta Moreira (2011) que o desafio em diversificar as estratégias de ensino, é fundamental na participação do aluno. Os desafios nos colocam diante das incertezas e, daí a possibilidade em corrigir os desvios, ou quem sabe, corrigir nossos próprios erros, tal como destacado por Moreira (2011, p.239) “não há nada errado em errar. Errado é pensar que a certeza existe, que a verdade é absoluta, que o conhecimento é permanente”.

Vemos aí, o ensino centrado na relação professor-aluno capaz de promover o diálogo através de uma permanente troca de perguntas, ao invés de respostas prontas e fechadas. O fundamental é que professor e alunos tenham uma postura curiosa, indagadora e não passiva. O diálogo e indagação, mediados pela linguagem, nos leva a novos conhecimentos e novas percepções. Assim, ensinar ou aprender um novo conteúdo é aprender sua linguagem, não só as palavras, mas também outros símbolos de maneira substantiva e não arbitrária. Em última instância, o que se percebe é inseparável de como se fala. Por exemplo, através de uma pergunta discursiva, podemos apreender de maneira significativa o significado de determinadas aprendizagens para o aluno.

Destaca Moreira (2011) que a aprendizagem significativa é caracterizada pela interação cognitiva entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. O conhecimento

prévio é, isoladamente, a variável que mais influencia a aprendizagem, isto é, só se aprende a partir daquilo que se conhece.

Moreira (2010) propõe alguns princípios programáticos facilitadores para essa aprendizagem, que são: **diferenciação progressiva** que é o princípio programático segundo o qual as ideias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino devem ser apresentadas desde o início da instrução e, progressivamente, diferenciadas em termos de detalhes e especificidade; **reconciliação integradora**, esse princípio se dá quando a programação da matéria de ensino deve não apenas proporcionar a diferenciação progressiva mas, também, explorar explicitamente, relações entre conceitos e proposições, chamando a atenção para diferenças e semelhanças e reconciliando inconsistências reais e aparentes; **organização sequencial** que consiste em sequenciar os tópicos, ou unidades de estudo de maneira tão coerente quando possível, com relações de dependência naturalmente existentes entre eles na matéria de ensino; **consolidação** que objetiva a aprendizagem significativa, levando a insistir no domínio (respeitada a progressividade da aprendizagem significativa) do que está sendo estudado antes de introduzir-se novos conhecimentos e **organizadores prévios** que são materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si mesmo, em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade, para servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deveria saber para que esse material fosse potencialmente significativo. Eles facilitam a passagem da estrutura conceitual da matéria de ensino para a estrutura cognitiva do aluno de maneira significativa.

A construção dos organizadores prévios deve levar em consideração o conteúdo a ser abordado, os principais conceitos, as ideias mais importantes e mais gerais a fim de identificar o conhecimento prévio necessário.

Moreira (2011) dá uma nova abordagem para a teoria da aprendizagem significativa, isto é, uma visão de aprendizagem crítica. Para ele, adquirir novos conhecimentos sem criticidade não é suficiente para as necessidades de hoje, uma vez que é necessário, para uma formação intelectual autônoma, que os alunos sejam capazes de desenvolver uma reflexão crítica dos conteúdos aprendidos.

Segundo Cajazeiras (2011),

Para atender a essa nova demanda, Moreira propõe princípios facilitadores da aprendizagem significativa crítica, que possibilitam o desenvolvimento de uma educação cognitiva e, ao mesmo tempo, formadora dos princípios de cidadania.

Perguntas, em vez de respostas (estimular o questionamento em vez de dar respostas prontas). Proporcionar aos alunos o espaço do questionamento, estimular as perguntas, pode contribuir para uma

aprendizagem mais efetiva e uma capacidade de associação entre os conteúdos da escola e as questões da vida cotidiana;

Diversidade de materiais (abandono do manual único – o livro didático). O material didático é uma valiosa ferramenta de trabalho, um auxílio no desenvolvimento das aulas, propiciando maior eficiência no ensino. Por meio do uso dos diversos materiais e de recursos pedagógicos diferenciados, possibilita-se o desenvolvimento das capacidades intelectuais do aluno, da reflexão, do comportamento crítico, e de suas atitudes;

Aprendizagem pelo erro (é normal errar; aprende-se corrigindo os erros). Propiciar aos alunos a oportunidade de refletir sobre os erros, ultrapassando-os, é um caminho de construção de conhecimento;

Aluno como perceptor representador (o aluno representa tudo o que percebe);

Consciência semântica (o significado está nas pessoas, não nas palavras); o significado das palavras é atribuído pelas pessoas;

Incerteza do conhecimento (o conhecimento humano é evolutivo). Estimular a clareza de que o conhecimento é construído, podendo estar certo ou errado, dependendo do contexto;

Desaprendizagem (às vezes o conhecimento prévio funciona como obstáculo epistemológico). O conhecimento pautado nas concepções do dia a dia, muitas vezes não corresponde ao conhecimento científico;

Conhecimento como linguagem (tudo o que chamamos de conhecimento é linguagem); a chave do conhecimento está em conhecer sua linguagem, cada disciplina apresenta seus símbolos próprios e ensiná-las significa ensinar uma linguagem, um modo de ver o mundo;

Diversidade de estratégias. O quadro de giz deve ser mais uma estratégia e não a única. Não são necessárias estratégias e atividades sofisticadas. O uso de estratégias que promovam a participação ativa do aluno, tais como seminários, discussões, pesquisas, debates, com a mediação do professor, é fundamental para facilitar a aprendizagem significativa crítica. Nesse caso, especificamente, o importante é que o material seja estimulador de descobertas e significativo. (MOREIRA, 2010, apud CAJAZEIRAS, 2011, pp. 43 e 45)

Nesta perspectiva, é necessária a reelaboração da prática pedagógica para promover uma aprendizagem significativa crítica. Para Moreira (2010), o objetivo da aprendizagem significativa não se encerra em adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, pois é necessário que este conhecimento seja adquirido de uma forma crítica.

## CAPÍTULO 2

### RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

Este capítulo concentra um breve resumo teórico sobre conteúdos correlatos envolvidos diretamente no estudo. Foi dividido em três seções: a primeira seção dá realce a importância da História da Matemática; a segunda seção constitui de um estudo introdutório da História da Matemática; e, a terceira, um estudo introdutório da História da Trigonometria.

#### 2.1. A IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Enquanto o ensino tradicional é bastante centrado na memorização, onde é preciso decorar tudo, o ensino renovado, quando aborda um novo assunto, propõe que isso seja feito por redescoberta, isto é, sempre que possível, partir do concreto para o abstrato, despertando, assim, no aluno um grande interesse sobre o tema.

Pode-se, também, usar a História da Matemática, que é outro tipo de abordagem, com o objetivo de colocar o aluno em contato com a história da criação do conhecimento da matemática, pois este recurso, além de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas, torna a aprendizagem mais significativa.

A História da Matemática pode ser um instrumento muito eficaz no processo de ensino-aprendizagem de matemática, uma vez que permite entender conceitos a partir de sua origem, considerando todas as suas modificações ao longo da história. Com isso, a compreensão do aluno é facilitada, como desperta, também, sua curiosidade para pesquisas futuras.

O importante de tudo isto é que a História da Matemática ajudará o aluno a perceber que a matemática não é uma ciência isolada dos demais saberes e, além do mais, o conhecimento da História da Matemática possibilita perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios que os matemáticos enfrentaram e que foram desenvolvidas com grande esforço, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após o processo de formalização.

Segundo Viana e Silva:

A História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta motivadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja. O maior ganho dessa forma de utilizar a História da Matemática na Educação Matemática é a

possibilidade de discutir-se crença, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu (VIANA e SILVA, 2007, p.7).

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1998) os conceitos abordados vinculados com sua história tornam-se instrumentos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. Nesse sentido, a História da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural. Os PCN's, nesse sentido, afirmam que,

[...] ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração PCN's (BRASIL, 1998, p.43).

Uma outra maneira de participar da história apresentada na proposta dos PCN's (1998), para o ensino da matemática, refere-se ao uso de problemas históricos, pois consideram que os conceitos matemáticos precisam ser tratados mediante a exploração de problemas, ou seja, situações nas quais os alunos necessitem desenvolver algum tipo de estratégias para resolvê-las.

A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. PCN's (BRASIL, 1998, p.40).

Partindo da noção reafirmada por Malba Tahan (2010, p. 249) de que “a matemática é um método geral de pensamento aplicável a todas as disciplinas e desempenha um papel dominante na ciência moderna”, parece inconcebível pensar neste campo de saber sem se preocupar com a aprendizagem de seu conteúdo.

Considera-se a História da Matemática como elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na fonte de busca, na compreensão e como elemento esclarecedor de conceitos matemáticos. Possibilita o levantamento e a discussão das razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante.

#### Segundo D'Ambrosio

Uma percepção da História da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre porque e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A

maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar os alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância. (D'Ambrósio, 2006, p.29, apud SOUZA, 2009, p.8)

Souza (2008) destaca nos estudos de D'Ambrósio que a História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias ou práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas no contexto específico de sua época. A utilização da História da Matemática no Ensino de Matemática é um poder motivador que promove o despertar do interesse do aluno, podendo ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino aprendizagem da matemática atual. (D'AMBRÓSIO, 2006, p.29,apud SOUZA,p.8)

Nas palavras de Souza

a História da Matemática pode apoiar diversas necessidades educacionais e promover mudanças. Neste sentido o uso da História da Matemática pode servir a diversas situações, dentre as quais as seguintes: a) apresentar a História da Matemática como elemento mobilizador em salas de aulas numerosas ou com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem; b) usar a História da Matemática na educação de adultos, promovendo a oportunidade ao aluno de observar, ao longo da história, o esforço de pessoas para superar dificuldades semelhantes àquelas que eles próprios possam estar vivenciando; c) apresentar as ideias da História da Matemática a alunos bem dotados, que possam estar se sentindo desestimulados perante a classe, satisfazendo ou dando respostas a questionamentos tais como “o quê?”, “como?”, “quando?”; d) utilizar a História da Matemática como estímulo ao uso da biblioteca; e) humanizar a Matemática, apresentando suas particularidades e figuras históricas; f) empregar a História da Matemática para articular a Matemática com outras disciplinas, como Geografia, História e Língua Portuguesa (expressão e linguagem, interpretação de textos, literatura); g) usar a dramatização ou produção de textos para sensibilizá-los sobre as realidades do passado e presente, apresentando as dificuldades de diferenças de cada época. (BARONI, TEIXEIRA e NOBRE, 2005, p.172, apud SOUZA, 2009, p.9)

Recorre-se à história com finalidades diretamente relacionadas com as práticas em sala de aula. Uma delas é criar problemas que possam ser debatidos entre professor e aluno. Tais problemas não são os encontrados na História da Matemática, mas nos possibilitam debater alguns aspectos epistemológicos presentes na construção histórica do conhecimento trigonométrico e criar oportunidades de investigação para a Educação Matemática.

Mediante Silveira, é ingênuo considerar a História da Matemática como um simples instrumento metodológico, pois ela é uma área de conhecimento matemático, isto é, um campo de investigação científica.

Ao desenvolvermos estudos relativos às contribuições da História da Matemática para a Educação Matemática, percebemos que é necessário muita cautela, pois pode-se incorrer no erro de simplesmente assumir a

História da Matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma investigação entre o conteúdo e sua atividade educacional. Essa interligação se fortalece a partir do momento que o professor de matemática tem o domínio da história do conteúdo que ele trabalha em sala de aula. (NOBRE e BARONI, 1999, p.132, apud SILVEIRA, 2010)

A principal função da História da Matemática, em sala de aula, é identificada pelo auxílio, dado por esta, no desenvolvimento cognitivo dos alunos por meio de resolução de problemas, a partir de definições próprias dos conceitos, ligando a causalidade dos fatos à criação de novas definições. Ao professor cabe conhecer a história dos conceitos que norteiam os conteúdos a serem ensinados, enfrentando as dificuldades, buscando, assim, transformar as informações históricas em atividades de ensino, tornando, dessa forma, o ensino mais significativo.

## 2.2. ESTUDO HISTORIOGRÁFICO DA MATEMÁTICA

Nesta seção faremos um breve resumo da História da Matemática e sua ligação com a História da Trigonometria. As informações citadas aqui foram tiradas das seguintes fontes: Edward S. Kennedy (1992), Carl Boyer (2010) e Howard Eves (2008).

Entendemos que a matemática sempre existiu, porém, seus registros começam a surgir junto com a escrita. No período de 3000 a.C. até 260 d.C. no Egito e Mesopotâmia, foram escritos o Papiro de Moscou (185 a.C.), Papiro de Rhind (1650 a.C.), outros papiros egípcios e tábulas cuneiformes babilônias. Neste período foi criada a escrita (por volta de 3000 a.C.) e surgiram os escribas (por volta de 2500 a.C.).

Na Grécia, houve o desenvolvimento da geometria dedutiva (600 a.C. – 540 a.C.), o início da Teoria dos Números (540 a.C.), a descoberta das grandezas incomensuráveis (340 a.C.), o desenvolvimento axiomático da geometria (300 a.C.), a que foi compilada presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (180 a 125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado “o pai da trigonometria”. O primeiro livro importante de matemática que se tem registro, surgiu em (300 a.C.), intitulado os Elementos de Euclides. E na mesma época, aproximadamente, surgiram os escritos de Eudemo de Rodas (320 a.C.).

Também foi escrito um tratado, em seis livros, por Menelau de Alexandria (cerca de 100 d.C.), tratando de cordas num círculo. O teorema de Menelau desempenhou papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia, mas de longe a mais influente e

significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis Matemática*, obra de treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria, cerca de meio século depois de Menelau. Surgiram, também, nesse período, as primeiras noções do que viria a ser o Cálculo Integral (225 a.C.).

Deve-se a conquista da Grécia pelos romanos (146 a.C.). Os matemáticos que mais se destacaram nesse período foram Thales de Mileto (624 – 548 a.C.), Pitágoras de Samos (580 – 500 a.C.), Proclus Diadochus (485 – 410 a.C.), Platão (428 – 347 a.C.), Aristóteles (384–322 a.C.), entre outros.

No período de 200 a.C. a 1250 d.C. na Índia, houve a queda do Império Romano do Ocidente no ano de 476 d.C.; foi nesse ano que nasceu Aryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. A Índia, como o Egito, tinha seus “atiradores de cordas”, e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construção de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimentos conhecido como os *SULVASUTRAS*, ou “Regras de Cordas”.

Corda ou sulva era uma corda usada para medidas e *sutra* significava um livro de regras. O *sulvasutra* tratava-se de um compêndio de livros, todo escrito em versos. Após os *sulvasutras*, vieram os *Siddhantas*, com várias versões épicas, que teriam sido ditadas pelo deus do Sol, de nome Surya e se referem a regras astronômicas (gregas misturadas com o misticismo hindu). De sua leitura pode-se inferir o nascimento, na Índia, da precursora da função trigonométrica moderna chamada seno. Aryabhata, no século VI, escreveu o compêndio *Aryabhatya*, correspondente a “Os elementos”, de Euclides. Esse compêndio referia-se a uma matemática pura, a um alto grau de abstração, a medida do tempo e a trigonometria esférica.

Uma das duas contribuições da Índia de maior influência na História da Matemática foi o desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros. A outra foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega das cordas. E o valor da raiz quadrada de 10 para o número “pi” – foi tão frequente na Índia que às vezes é chamado de valor hindu.

Grandes nomes se destacaram, neste período, na Índia: Brahmagupta, que foi grande matemático do século VII, na Índia Central, onde deu grande contribuição à Álgebra, com soluções gerais para equações quadráticas e, ainda, às equações indeterminadas e quadriláteros. Ele utilizou formas abreviadas para adição, subtração e, na divisão, o divisor sob o dividendo – como escrevemos frações, mas sem as barras. Sua notação é semelhante à de Diofante.

Bhaskara (viveu entre 1114 e 1185 d.C.) foi o maior matemático hindu do século XII e complementou a obra de Brahmagupta, tendo a sua obra compreendida em parte no livro “Vija-Ganita” – é aí que, pela primeira vez, se encontra a afirmação de que o quociente da divisão de um número por zero é igual a infinito. Nem mesmo os gregos haviam chegado a essa conclusão, na época de Aristóteles, porque o zero não era incluído na matemática grega.

Na Arábia, no período de 650 a 1200 d. C. foram escritos: “Tratados de Álgebra de Al-Kowarizmi (820 d.C.) e Tábuas Trigonométricas de Abul Wefa (980 d.C.) e de Ulugh Beg (1455 d.C.), sendo que os principais eventos foram a preservação da matemática Hindu e Grega e o desenvolvimento de técnicas de obtenção de resolução de equações cúbicas.

Muitos intelectuais árabes escreveram sobre matemática e astronomia, sendo o mais famoso de todos Mohammed ibn Musa AL-Khowarizmi. Ele escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre numerais hindus que exerceram enorme influência na Europa quando foram traduzidos para o latim no século XII.

Provavelmente o mais ilustre dos matemáticos muçulmanos do século X foi Abul-Wefa (940-998 d.C.), nascido na região montanhosa persa de Khorâsân. Ele se tornou especialmente conhecido por sua tradução de Diofanto, por ter introduzido a função tangente em trigonometria e por uma tábua de senos e tangentes, com incrementos de 15 minutos, que elaborou. Para tanto ele aperfeiçoou o método de Ptolomeu, obtendo seno de 30 graus com nove casas decimais.

O livro de Al-Khowarizmi sobre o uso dos numerais hindus também introduziu uma palavra no vocabulário da matemática. Não há cópias do original desse livro, mas em 1857 descobriu-se uma tradução latina que começa por “Algoritmi disse ...”. Nessa abertura o nome Al-Khowarizmi transformou-se em Algoritmi que, por sua vez, deu origem a palavra atual algoritmo que significa “arte de calcular de uma maneira particular” (EVES, 2008, p.226).

Na Europa de 450 d.C. até hoje, os principais escritos foram os “Manuscritos de Trabalho de Geometria e Aritmética” e a obra “Origens ou Etimologia” e os principais eventos desse período foram “Ascensão do Cristianismo” e a criação das escolas Monásticas, onde se destacam Boécio (475-524 d.C.), Cassiodoro (480-575 d.C.) e Santo Isidoro (570-636 d.C.).

No período de 950-1500 d.C. destacam-se as traduções de trabalhos árabes (1120-1140 d.C.), as transcrições dos Elementos de Euclides e das tábuas astronômicas de Al-Khowarizmi e o livro Aritmética di Trenio (1478 d.C.). Neste período destacam-se a introdução dos números indo-arábicos ( sem o zero ) na Europa, evolução da escola urbana e criação dos “Studia Generalia” e Ascensão da Burguesia, primeiro livro impresso no mundo ocidental

(1478) e a primeira edição impressa dos Elementos de Euclides (1482). Como nomes a destacar temos: Gerbert (950-1003 d.C.), Adelardo de Bath (1075- 1160 d.C.) e Victorino de Feltre (1378-1447 d.C.).

No período que compreende 1450-1700 d.C., os principais escritos foram: traduções e impressões dos Elementos de Euclides e biografias de matemáticos (século XVII). Os eventos que mais se destacaram nesse período foram: difusão dos primeiros livros- textos para uso mercantil, o Renascimento, o início do simbolismo algébrico (1557-1631 d.C.), obtenção de soluções algébricas para equações cúbicas e quárticas (1545 d.C.), desenvolvimento da Álgebra Clássica (1580-1631 d.C.), desenvolvimento da Moderna Teoria dos Números (1635 d.C.), criação da Geometria Analítica (1629-1637 d.C.), criação da Probabilidade (1645 d.C.), início da Geometria Descritiva, criação dos Logaritmos (1614-1615 d.C.) e a criação do Cálculo Diferencial e Integral (1629-1687 d.C.).

Destacam-se neste período: François Rebolais (1483-1555 d.C.), Giuseppe Biancani (cerca de 1615 d.C.), Michel de Montaigne (1533-1592 d.C.), Gutemberg (cerca de 1450 d.C.), Giuseppe René Descartes (1596-1650 d.C.), Biancani (cerca de 1600 d.C.), Bernadino Baldi (séc. XVII), Johann Christoph Heilbronner (cerca de 1730 d.C.), Jean E'tienne Montucha (1725-1792 d.C.), além de Isaac Newton (1642-1705 d.C.) e Leibniz (1646-1716 d.C.).

De 1700 d.C. em diante os principais eventos foram a Revolução Francesa, Revolução Industrial, Movimento da Nova História, Movimento da Nova Escola (início do século XX), criação de Bourbaki, difusão e discussão do Princípio Genético e o Movimento da Matemática Moderna. Alguns matemáticos dessa época foram: Alex Claude Clairaut (1713-1765 d.C.), Kant (1724-1804 d.C.), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813 d.C.), Paolo Ruffini (1765-1822 d.C.), Cauchy (1789-1857 d.C.), Niels Henrik Abel (1802-1829 d.C.), De Morgan (1806-1871 d.C.), Galois (1812-1832 d.C.), Bourbaki (1816-1897 d.C.), Dedekind (1831-1916 d.C.), Ernest Haeckel (1834-1919 d.C.), George Cantor (1845-1918 d.C.), Felix Klein (1849-1925 d.C.), Peano (1858-1932 d.C.), David Eugene Smith (cerca de 1860-1944 d.C.), Hilbert (1862-1943 d.C.), Ernst Zermelo (1871-1956 d.C.), Mortz Benedict Cantor (1829-1920 d.C.), George Polya (1887-1985 d.C.), Florian Cajoni (cerca de 1894 d.C.), Neumann (1903-1957 d.C.), Gödel (1906-1978 d.C.), Andrew Wiles (1953) e outros mais.

Devemos reconhecer que a Matemática está presente em nossas vidas, desde um simples contar até a utilização de sofisticados computadores. Consideramos a História da Matemática como uma área do conhecimento, isto é, um campo de investigação científica,

buscando conhecer a história dos conceitos norteadores dos conteúdos a serem ensinados e procurando transformar as informações históricas em atividades de ensino aprendizagem.

Foi um longo caminho que os matemáticos de Euclides até Peano levaram para chegar à matemática que hoje ensinamos aos nossos alunos. Devemos deixar claro para eles que a Matemática que lhes ensinamos hoje, é um conhecimento matemático que não caiu do céu ou que tenha surgido pronto e acabado mas, que levou um grande tempo para a sua constituição.

Entendemos que a História da Matemática contribui para a construção do conhecimento do aluno e é reconhecida como parte da Educação Matemática. Dessa forma, ao se trabalhar o conteúdo de trigonometria, utilizando-se a História da Matemática para contextualizar e motivar essa aprendizagem, passa-se, então, a dar-lhe significado, possíveis aplicações. Dessa maneira oportuniza-se ao aluno maior facilidade em compreender e utilizar este conteúdo em seu cotidiano.

### **2.3. ESTUDO HISTORIOGRÁFICO DA TRIGONOMETRIA.**

Não é nossa intenção fazer um estudo profundo e detalhado da História da Trigonometria, mas sim, breve e suficiente que nos permita fazer um estudo histórico da evolução dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo até sua incorporação à análise real.

As informações, aqui contidas, foram extraídas do Ensaio por nós produzido, que encontra-se no Apêndice 1, e as informações históricas contidas nele foram extraídas dos livros de Edward S. Kennedy (1992), Carl Boyer (2010), Howard Eves (2008) e, onde podemos encontrar mais detalhes sobre a História da Trigonometria e a construção dos conceitos trigonométricos.

O conhecimento matemático dos Egípcios, Babilônios e dos Chineses esteve associado a um caráter pragmático, de solução de problemas do cotidiano. A geometria desenvolvida nessas três civilizações, aparentemente, estava relacionada ao conhecimento prático do teorema de Pitágoras e também de semelhança entre triângulos.

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia. Esse rudimento é destacado no povo babilônio com a montagem de uma tabela dos valores do quadrado da secante, que foram elaboradas, possivelmente, pelo desenvolvimento da astronomia. No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao seqt de um ângulo. Na construção das

pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de  $\text{seqt}$  que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical. O  $\text{seqt}$ , hoje, é equivalente a cotangente de um ângulo.

Os Babilônios tinham grande interesse pela astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. Eles foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Foi construído por eles, no século 28 a.C., um calendário astrológico e foi elaborada, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares.

Um importante conceito no desenvolvimento da trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). No início da civilização os homens eram nômades e viviam da caça e da colheita de frutos silvestres. Com o passar do tempo, passaram a fixar residência próxima às margens de rios da Ásia, como o Eufrates, o Grande e o Nilo. Quando começaram a criar animais e a cultivar plantações para sobrevivência, surgiu a necessidade de registrar a passagem do tempo, pois há animais que só se reproduzem e cultivos que só nascem em determinadas épocas do ano.

Um instrumento muito utilizado na antiguidade para medir o tempo era o relógio de sol. Era constituído com uma vareta posicionada de forma vertical com o solo e sob luz solar. Esta vareta recebeu o nome de gnômom.

Ao observar a sombra produzida pelo gnômom, percebeu-se que seu comprimento variava conforme a hora do dia. Desta forma dava para acompanhar a passagem do tempo para variação do comprimento da sombra.

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-King, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo, mas, infelizmente, não se tem registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medidas usadas.

Sabemos que os diversos ramos da matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Tales de Mileto (625 – 546 a.C.), com seus estudos e semelhanças

que embasaram a trigonometria. Tales teve a oportunidade de viajar ao Egito e à Babilônia e receber, desses povos, importantes contribuições na área da trigonometria.

Com Tales, unida ao rigor matemático, aparece a preocupação em relacionar medidas de ângulos, lados e suas propriedades. É conhecido o fato de que ele, quando de sua visita ao Egito, ter calculado a altura da grande pirâmide de Quéops. Provavelmente, ele deve ter procedido associando as noções de triângulo isósceles e de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

Com relação ao discípulo de Tales, Pitágoras de Samos (570 – 495 a.C.), conjectura-se que ele tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: “Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”. Deste teorema é que deriva a relação fundamental da trigonometria.

Relativo ao problema da navegação e à astronomia, encontramos, entre os gregos, grandes matemáticos que contribuíram com medições, cálculos e ideias, que poderíamos considerar como os primeiros estudos com indícios de trigonometria. Podemos citar, por exemplo, Hipsicles (segunda metade do século II a.C.), Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.), Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) e Ptolomeu (100 – 180 d.C)

Hipsicles foi influenciado pela cultura babilônica, onde dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por Hiparco para qualquer círculo. A trigonometria no tempo de Hiparco baseava-se em uma única função denominada função corda, que relacionava o ângulo formado por duas semi-retas  $p$  e  $q$ , ambas com origem no centro de uma circunferência  $\alpha$  com o comprimento do segmento de extremidades  $M$  e  $N$ , respectivamente determinadas pelas intersecções das semi-retas  $p$  e  $q$  com a circunferência  $\alpha$ . (O comprimento do segmento  $MN$  é igual ao valor da função corda.)

Hiparco construiu uma tabela de função corda dos valores de meio em meio grau, até  $180^\circ$ , que foi um grande avanço para os estudos astronômicos. Por esse motivo ele é considerado por muitos historiadores como “o pai da trigonometria”. Ele fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, na qual incluiu uma tábua de corda. Deve-se a Hiparco a divisão da circunferência em 360 partes. Ele deu o nome arco de um grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Foi dele, também, a divisão de cada arco de um grau em sessenta partes, da qual obteve o arco de um minuto.

Esquema de Hiparco: apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividida pelo comprimento do círculo é justamente esse tal valor, isto é, para um círculo de raio igual a 1, o comprimento da corda subtendida por um ângulo  $\alpha$  é

$$2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}.$$

O primeiro cientista a propor a existência de um sistema heliocêntrico foi Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), onde, segundo ele, os planetas giram em torno do Sol. Aristarco se dedicou a pesquisar a distância entre a Terra e a Lua e a distância entre a Terra e o Sol. Os instrumentos usados por ele não permitiam obter valores mais precisos, o que motivou algumas imprecisões nas medidas encontradas. Porém o método utilizado por ele estava correto.

Aristarco sabia que num dado círculo, a razão do comprimento do arco para o comprimento da corda, diminui quando o arco varia de  $180^\circ$  para  $0^\circ$  graus, aproximando-se do limite 1. Ele quis dizer que, para um arco próximo de zero grau (no caso de Aristarco  $3^\circ$ ) vale que o comprimento da corda é aproximadamente igual ao comprimento do arco. Tendo ele estabelecido as relações dos diâmetros da Terra, Lua e Sol, o passo seguinte para a determinação do tamanho do Sol e da Lua seria a determinação do diâmetro da Terra, passo esse que foi dado por Eratósteles de Cirene.

Eratósteles de Cirene (276 a 194 a.C.) viveu em Alexandria algumas décadas depois de Euclides. Ele foi diretor de uma biblioteca e de um museu. Conta a história que, certa vez, ao ler um papiro da biblioteca se deparou com a informação de que na cidade de Siene, no vale do Nilo, aproximadamente 800 Km da cidade de Alexandria (5000 estádios – um estádio era cerca de um décimo de milha), ao meio dia do solstício de verão, que era o dia mais longo do ano, no hemisfério norte, colunas verticais não projetavam qualquer sombra, isto é, o sol situava no prumo. Ao mesmo tempo em Alexandria, verificou-se que o sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do sol ao zênite era um cinquentavos de um círculo, isto é,  $7 \frac{1}{2}$  grau. Isso forneceu um comprimento da circunferência terrestre de 250 mil estádios, o que corresponde a 25 mil milhas ou 37 mil quilômetros.

Pode-se observar que com Aristarco e Eratóstenes, o grande interesse dos gregos, por várias e várias gerações, foi o desenvolvimento da astronomia.

Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates de Chios (430 a.C.) a Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.), os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas

de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. (BOYER, 2010, p.110).

A trigonometria, no início, não era vista como uma ciência, mas sim uma ferramenta para auxiliar no estudo da astronomia. À medida que a trigonometria foi se desenvolvendo, ela passou a servir de base para outras diversas áreas do conhecimento.

Depois da obra de Hiparco, a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade, denominada *Syntaxis Mathematica*, foi escrita por Ptolomeu de Alexandria (85 - 165 d.C.). Esta obra de Ptolomeu era composta de 13 volumes e ficou conhecida como *Almagesto* (a maior). Nesta obra (*Almagesto*), havia o uso dos termos grau, minutos ( $\frac{1}{60}$  de grau) e segundos ( $\frac{1}{3600}$  de grau).

O capítulo 11, do volume um, do *Almagesto*, consiste numa tabela de cordas e é explicada, no capítulo 10 desse mesmo volume, como tal tabela pode ser calculada.

Analisando bem, não existe no *Almagesto* nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, mas sim a função corda do arco  $x$ , ou  $\text{crd } x$ , embora esses termos não apareçam. Para a construção desta tabela, partiu do fato de que em um quadrilátero inscrito ABCD vale a relação que é conhecida como Teorema de Ptolomeu:

“Se ABCD é um quadrilátero inscrito num círculo, então a soma dos produtos das diagonais:  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ ”

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é,  $\text{sen}(a+b)$  e  $\text{sen}(a-b)$ . Além do mais, demonstra que  $\text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = 1$ , onde  $a$  é um ângulo agudo. A circunferência foi dividida em 360 partes (agora com o nome de graus), cada uma dessas, dividida em 60 partes denominadas “partes minutae primae” (minuto) e, cada uma dessas últimas, dividida por 60 partes que foram denominadas “partes minutae secundae” (segundo) e o raio do círculo foi dividido em 60 porções. A tabela de cordas de Ptolomeu fornece a medida das cordas de  $(\frac{1}{2})^\circ$  a  $180^\circ$ , de meio em meio grau.

Quem sucedeu os gregos na História da Matemática foram os hindus, com os quais a trigonometria continuou como uma ferramenta com aplicações na astronomia.

Com o declínio do império romano, o centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, fato que revolucionou a trigonometria com um conjunto de textos que foram denominados *Siddhanta*, cujo significado é sistema de astronomia.

O texto que chegou até nós foi o Surya Siddhanta, cujo significado é sistemas do Sol. Este texto, de aproximadamente 400 d.C., foi todo escrito em versos e em sânscrito.

Com esse trabalho, se deu o primeiro aparecimento real do seno de um ângulo. O autor desse trabalho foi Aryabhata. Ele elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usa a palavra *Jiva* no lugar de seno. Nasceu, assim, a função meia corda, conhecida hoje como função seno, que possibilitou a ampliação do campo de atuação da trigonometria. Os hindus definiam o *Jiva* como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

A trigonometria chega ao mundo islâmico, por volta de 800 d.C., onde teve um grande desenvolvimento, mas ainda era aplicada na astronomia e cartografia. Os matemáticos árabes herdaram a trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético destes últimos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o matemático AL BATTANI (850 – 929 d.C.) que, adotando a trigonometria hindu, introduziu uma preciosa inovação – o círculo de raio unitário – surgindo, então, o nome da função seno.

Com essa inovação e, juntamente, com o Teorema de Tales, AL BATTANI demonstrou que a razão *Jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa. AL BATTANI construiu uma tábua de  $\frac{1}{4}$  em  $\frac{1}{4}$  de graus, isto é, uma tabela de senos, apesar deste nome não ter sido usado para designá-la. Depois de AL BATTANI, destacamos Abu'L Wefa que, em 980 iniciou uma sistematização de provas e teoremas de trigonometria. Ele fez uma nova tabela para senos, diferindo de  $\frac{1}{4}^\circ$ , com oito casas decimais.

Destacamos um outro astrônomo Persa, de nome Nasir Eddin, autor, em 1250, do primeiro trabalho onde a trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, sem vínculo com a astronomia. Com Nasir Eddin são usadas as seis funções trigonométricas usuais, e são dadas regras para resolver os vários casos de triângulos planos e esféricos.

Com o declínio da Escola de Bagdad, o centro das atividades intelectuais foi deslocado para o sul da Europa, na Península Ibérica e, juntamente com ele, o estudo da trigonometria, principalmente nos triângulos esféricos, tão necessários aos estudos astronômicos. O século XII na História da Matemática foi, então, um século de tradutores sendo citados Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester. Mediante essas traduções, a Europa teve acesso à matemática árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles.

Foram vários os astrônomos árabes que se deslocaram para a Espanha para trabalhar e divulgarem os seus saberes. Os astrônomos Ibrahim ibn Yahyâ al Naqqâsh, autor de um conjunto de Tábuas Trigonométricas em 1050, e Jabir ibn Atlah, cujos estudos astronômicos de 1145 foram tão importantes que, mais tarde (1543), foram publicados em Nuremberg.

Fibonacci (1170 – 1250 d.C.) foi o matemático europeu mais habilidoso do século XIII. Ele foi bastante influenciado pela cultura árabe. Sua obra “*Practica Geometrica*”, em 1220, é uma aplicação da trigonometria árabe na agrimensura.

Paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, que já vinha ocorrendo na Europa desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu, também, o desenvolvimento das funções.

É devido aos alemães, grande parte do desenvolvimento da trigonometria, no período do Renascimento. Dentre eles, George Peurbach (1423 – 1461 d.C.), que traduziu o *Almagesto* diretamente do grego, livrando-o dos erros das traduções anteriores. Peurbach começou a calcular tabelas de senos com mais precisão, pois eram exigidas pelas aplicações. O trabalho dele teve continuação através de seu aluno, Regiomontano (1436 – 1476 d.C.) (mais conhecido por Regiomontanus), que organizou a trigonometria como uma ciência, parte da matemática, independente da astronomia.

Regiomontanus escreveu um “*Tratado sobre Triângulos*”, em cinco livros, que continha uma trigonometria completa. Neste tratado ele estuda cuidadosamente a resolução de triângulos, usando trigonometria do triângulo retângulo. Também encontram-se, neste trabalho, uma demonstração da Lei dos Senos, o cálculo de novas tabelas trigonométricas (aperfeiçoa o dos senos de Peurbach) e a introdução na trigonometria européia do uso das tangentes onde as incluiu em suas tábuas. A invenção posterior dos logaritmos e de alguns teoremas demonstrados por Napier (1550 – 1617 d.C.) mostra que a trigonometria de Regiomontanus não diferencia basicamente da trigonometria que se faz hoje em dia.

Nicolau Copérnico (1473 – 1543 d.C.), astrônomo polonês, contribuiu para a trigonometria. Na sua obra *De revolutionibus orbitum coelestium*, publicada em 1543, contém seções importantes da trigonometria. O conteúdo é semelhante ao da obra de Regiomontanus, cuja publicação se deu em Nuremberg uma década antes.

Com o surgimento da imprensa, a cultura é bastante difundida. O primeiro trabalho impresso em trigonometria, provavelmente a “*Tabula Directionum*” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg antes de 1485.

As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, ao invés de funções do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no “*Canon Doctrinae*

Triangulorum” de Joaquim Rhaeticus (1514 – 1576 d.C.), em 1551. Porém, ele não deu nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto perpendiculum, basis e hypotenusa. Rhaeticus foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semi-quadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até  $45^\circ$  e completando a tabela com o uso da igualdade  $\text{sen } x = \cos\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)$ . Foi ele quem introduziu secante na trigonometria européia e os cálculos de  $\text{senn}\theta$ , em termos de  $\text{sen } \theta$ .

Outro matemático que fazia seus estudos sobre trigonometria e fez alusão às relações da meia corda no círculo foi François Viète (1540 – 1603 d.C.). Ele era exímio conhecedor de álgebra. Fazendo uso dessa habilidade, ele sistematizou o uso da trigonometria algébrica, ampliando suas formas de utilização.

Petiscus, notável na trigonometria, publicou um tratado, no ano de 1595, onde corrigiu as tábuas de Rhaeticus e fez uma modernização do assunto. A palavra trigonometria aparece pela primeira vez, como título de um livro seu.

Sir Isaac Newton (1642 – 1727 d.C.) também deu sua contribuição à trigonometria. Ao mesmo tempo em que fazia seus estudos de cálculo infinitesimal, trabalhou com séries infinitas, tendo desenvolvido  $\text{arcsen } x$  em série e, por reversão, deduzido a série para  $\text{sen } x$ . A trigonometria atual tomou sua forma quando Euler adotou a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até, então, em 1748.

No livro “Introductio in Analysin Infinitorum”, (Euler, 1748), o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número definido pela série:  $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Euler, ainda mostrou que  $\text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  e  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , onde  $i$  é unidade imaginária e  $e$  é número de Euler.

O que se pode observar neste breve estudo da História da Trigonometria, é que a partir de um dado momento do século XVI, a trigonometria passou a ser encarada como uma ciência o que até então estava vinculada à astronomia como ferramenta e não possuía uma identificação própria. A partir desse período, passou a ter uma estrutura e desenvolvimento próprios, tornando-se um objeto de estudo dentro da matemática.

## CAPÍTULO 3

### APORTES TEÓRICO-METODOLÓGICO

O presente capítulo pormenoriza a dimensão teórico-metodológica da pesquisa. Foi organizado em cinco seções. A primeira delas abordou a metodologia de pesquisa utilizada, incluída a tipologia em uso. A segunda seção concentrou-se numa descrição dos sujeitos e do *locus* de pesquisa. A terceira focalizou os instrumentos de coleta de dados. A quarta seção evidenciou as fases de realização da pesquisa e a quinta foi uma descrição intensiva do Ensaio.

#### 3.1 A METODOLOGIA DE PESQUISA

Na presente pesquisa foi utilizado o estudo de caso, no qual foi inserido um esquema de investigação experimental de grupo único com pré e pós-teste, nos termos em que Creswell (2010) o discute, referendando a concepção de Campbell e Stanley (1997).

A metodologia aplicada foi o uso da História da Trigonometria e se fez em quatro etapas. Na primeira etapa, aplicou-se um teste (Apêndice 2) de avaliação. Na segunda etapa, um material didático, nomeado como um Ensaio, contando uma breve História da Trigonometria. Material este que cada aluno recebeu para que eles fizessem um estudo do mesmo, paralelamente ao estudo das funções seno e cosseno, no contra-horário das aulas de trigonometria. A adoção de esquema experimental de grupo único com pré e pós-testes, permitiu verificar a influência do uso da História da Trigonometria no interesse e na aprendizagem dos alunos. Durante a leitura deste material didático pelos alunos, desenvolvemos o conteúdo referente ao ensino de trigonometria, com metodologia convencional as condições de trabalho em uma escola pública de ensino médio – apenas com uma dupla preocupação: articulação com o Ensaio e adequação aos interesses típicos dos estudantes envolvidos. Na terceira etapa, aplicamos o mesmo teste que serviu para diagnosticar o domínio de pré-requisitos por parte da turma como instrumento de avaliação para verificar se mudou e o quanto mudou o conhecimento dos alunos sobre trigonometria, com o estudo simultâneo do material didático. Por último, cada estudante teve um espaço no pós-teste para responder um questionário (Apêndice 1) no qual evidenciou a sua compreensão, sobre se e como a História da Trigonometria o ajudou na compreensão e aprendizagem das funções seno e cosseno.

### **3.2. A DESCRIÇÃO DOS SUJEITOS E DO LÓCUS DE PESQUISA**

A pesquisa realizou-se no Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ-Campus Nilópolis), situado no bairro Nova Cidade, município de Nilópolis, RJ. Trata-se de uma escola federal de grande porte, atualmente (2011) com 2231 alunos matriculados, e que funciona com 30 salas de ensino EJA, Médio Técnico, Superior e Pós-graduação (Latus Sensu e Strictus Sensu) nos três turnos. Além da Diretora e dois Diretores adjuntos, trabalham, nesta instituição, seis coordenadoras pedagógicas e noventa professores das disciplinas do ensino médio técnico, superior e pós-graduação. A escola tem uma boa infraestrutura que dá suporte a professores e alunos. Possui uma biblioteca, três laboratórios de física, dois laboratórios de informática, nove laboratórios de química, uma quadra coberta, um auditório com capacidade para quatrocentas pessoas, uma piscina e um consultório médico.

A turma, na qual foi realizada nossa pesquisa, possui trinta e dois alunos matriculados, no segundo período do ensino técnico de Meio Ambiente, sendo doze meninos e vinte meninas. A idade varia de quatorze a dezessete anos. A maioria dos alunos mora em municípios vizinhos ao município de Nilópolis. A duração do período diário (matutino e vespertino) compreende a cinco horas e meia distribuídas em seis aulas de quarenta e cinco minutos cada. A carga horária para o ensino médio corresponde a quatro aulas semanais.

Para a coleta de dados, relacionados aos estudantes, solicitou-se, aos maiores de idade e/ou familiares (no caso de menores), uma autorização pautada na Resolução 196/96 - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme aprovação CEP/UNIGRANRIO sob o número 0144.0.317.000-11 (Anexo 1).

### **3.3 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS**

Para além do Ensaio envolvendo a História da Trigonometria, do Plano de Unidade (Apêndice 3) a ser adotado para o ensino das funções seno e cosseno - elaborados pelo professor-pesquisador junto com seus orientadores para uso na pesquisa, utilizou-se um teste misto como instrumento de avaliação, que chamamos de pré-teste, e o mesmo instrumento de avaliação, porém de controle, que chamamos de pós-teste da experiência de trabalho pedagógico, além de um questionário contendo perguntas sobre a História da Trigonometria e a sua influência no processo de ensino desenvolvidos neste estudo.

### **3.4. AS FASES DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA**

O desenvolvimento da pesquisa não se deu de forma linear, mas ramificada, isto é, seguiu um fluxo de vai e vem alternado em cada fase de realização da pesquisa, que

compreendeu: diálogo com referenciais teórico e teórico-metodológicos, elaboração do Ensaio “Uma breve História da Trigonometria e seus conceitos fundamentais”, organização do programa de estudos das funções seno e cosseno em um plano de unidade; elaboração de um teste de rendimento escolar sobre o conteúdo em foco; apresentação do projeto ao CEP/UNIGRANRIO; realização do trabalho pedagógico de ensino dos conteúdos específicos, paralelamente ao estudo da História da Trigonometria com a aplicação de instrumentos de coleta de dados; incentivo a produção de relatório pedagógico por parte dos alunos; exame de qualificação seguido de absorção das sugestões dadas ao estudo; revisão final; defesa/apresentação da dissertação.

Nossa pesquisa foi dirigida a alunos do 1º ano do ensino médio e foi elaborada com o intuito de introduzir os conceitos de seno e de cosseno de maneira significativa. Anteriormente a experiência, aplicou-se um pré-teste para avaliar os conhecimentos prévios ou anteriores do aluno a respeito de semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo e no sentido de servir de termômetro, para avaliar se o aluno domina os conteúdos matemáticos considerados como pré-requisitos para a pesquisa.

O pré-teste era constituído de nove questões, sendo oito objetivas e uma dissertativa. Após o pré-teste, entregou-se a cada aluno da turma um exemplar do Ensaio que consta de uma breve História da Trigonometria, para que os mesmos fizessem uma leitura dele ao longo e simultaneamente ao estudo sobre os conceitos de seno e cosseno. Este Ensaio foi produzido pelo pesquisador, durante a revisão bibliográfica, constando de uma breve História da Trigonometria.

A sequência de ensino constituiu-se de oito encontros, correspondendo a trinta e duas aulas de quarenta e cinco minutos cada uma. A cada encontro, fez-se um breve comentário do Ensaio com relação ao conteúdo estudado nesse encontro.

Ao término dos encontros de ensino, aplicou-se um pós-teste que era o mesmo instrumento usado como pré-teste, aplicado com o intuito de se obter dados comparativos (pré e pós-testes) a partir dos quais se possa dizer se o Ensaio foi de fato um instrumento auxiliar capaz de ajudar de modo significativo no rendimento estudantil – após a turma ter passado pela experiência, isto é, após o processo ensino-aprendizagem apoiado na leitura simultânea do Ensaio.

Evidente que o tratamento das respostas nesta parte do teste foi articulado com as notas obtidas pelos grupamentos de aproveitamento ou rendimento escolar. De modo a deixar evidenciadas as respostas dos alunos com alto, médio e baixo rendimento no pós-teste.

### 3.5 DESCRIÇÃO INTENSIVA DO ENSAIO

Na análise de Salvador (1986, p.34), o Ensaio constitui um dos tipos de trabalhos monográficos típicos de cursos de pós-graduação *stricto sensu*. Seu significado vem passando por revisões, ao longo da história, mas hoje,

(...) passou a ser sinônimo de uma exposição bem desenvolvida, objetiva, discursiva e concludente. (...) de natureza reflexiva e teórica em torno de fenômeno, tema ou livro (...). Como artigo científico (...) inclui introdução, desenvolvimento e conclusão (...) trabalho livre e pessoal (...) exige uma ampla maturidade intelectual (...) não pode dispensar-se de um fino sentido de rigor e firme coerência expositiva.

Do ponto de vista dicionarizado, o termo é explicado - por Apolinário (2004, p.70) como “artigo teórico (...) tipo de estudo experimental típico da área médica (...) investigação preferida quando o objetivo é testar a eficiência de um tratamento (...)”.

Trata-se, pois, de um valioso aliado para trabalhos acadêmico-científicos e, no caso deste estudo, passou a ser assumido como o texto, de natureza narrativa e historiográfica, abordando acontecimentos determinantes na influência da origem e do desenvolvimento da trigonometria, como campo de estudos. Nele reside o suporte da hipótese de estudo que sustenta ser a História da Matemática uma ferramenta de apoio à aprendizagem das funções seno e cosseno.

As características marcantes deste documento, quanto à forma, era manter a estrutura de histórias de pequenas e grandes contribuições que vão se somando a outras, ligadas às necessidades e aos interesses das sociedades, a cada tempo-lugar, para as quais um grande pensador ofereceu a sua contribuição. Quanto ao conteúdo, foram selecionados acontecimentos e personagens relevantes que pudessem representar – nessas histórias, os elos na cadeia de compreensão das funções seno e cosseno.

No conjunto - de conteúdo e forma, a intenção é apagar a suposta aridez e o caráter aparentemente abstrato e descolado da realidade, que são alegados por alunos com dificuldades de aprendizagem de trigonometria, de modo a ratificar que tais estudos têm raiz na história da humanidade, e tem tudo a ver com esta.

Assim, o Ensaio - foi elaborado com a finalidade de oferecer uma visão panorâmica sobre a História da Trigonometria, para iniciantes de nível médio, que estejam estudando o assunto funções seno e cosseno. A intenção é que a leitura desse texto, paralelamente ao estudo de Trigonometria, haja como uma ferramenta facilitadora da aprendizagem deste assunto.

Sua elaboração, em linguagem fácil e didática, esteve intencionalmente relacionada ao nível do interlocutor a quem se destina, para facilitar a aquisição de conhecimentos significativos, que funcionam como base ou raiz deste assunto. Portanto, trata-se de um material de apoio didático de suma importância para eles, que se dispuserem a aprender funções seno e cosseno.

O Ensaio organizou-se em nove partes, cada uma das quais constitui resposta a uma pergunta específica. No conjunto, as partes do trabalho acabam tecendo uma breve história que, junto aos conceitos relacionados à trigonometria, acabam dando uma bagagem para influenciar na aprendizagem de outros conceitos nessa área de saber.

Tal documento contém uma apresentação, na qual tanto situa o aluno tanto sobre a importância e objetivos do conhecimento do seu conteúdo para aprender trigonometria, quanto sobre os procedimentos a serem adotados nesse estudo individualizado. Assim, foi recomendado aos estudantes leitores a adoção de quatro ações importantes, em favor de sua aprendizagem:

1. façam a leitura deste material em casa, durante uma hora, todos os dias a partir do recebimento do Ensaio, em horário diferente do horário escolar;
2. anotem suas dúvidas em seu caderno de estudos;
3. tirem as dúvidas anotadas com o professor-pesquisador;
4. conversem com os colegas, que estão lendo o Ensaio, para trocarem as dúvidas ou idéias, e compartilhem suas compreensões, no dia-a-dia de escola;

Embora estas informações devam ser dadas no ato de entrega do Ensaio a todos os que desejarem participar da pesquisa, entendemos ser importante retomar uma síntese delas na apresentação do Ensaio que é concluída com palavras de entusiasmo, as quais deverão ser frequentemente retomadas, em favor da manutenção do interesse estudantil.

Em síntese, esperamos que ao final do estudo os alunos, sujeitos da pesquisa, tenham construído, de modo significativo, conhecimentos sobre a trigonometria, através do estudo do material didático apresentado.

## **CAPÍTULO 4**

### **A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA COMO ELEMENTO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO**

Consideraremos significativos os resultados encontrados através da investigação científica em História da Trigonometria que se constitui de um material histórico, em nosso percurso como docente, utilizado em sala de aula, isso porque nos possibilitou novas descobertas em relação à interação professor-aluno. Assim vivenciamos com essa metodologia, a alteração da rotina em sala de aula, com ela alunos e professor passam a interagir mais.

Nossa intenção é que o uso da História da Trigonometria traga evidências de espontaneidade, tanto para os alunos quanto para o professor, que os mesmos possam resgatar a euforia em querer resolver problemas, procurar solucionar as situações propostas e, o principal, que eles se sintam interessados a ensinar e aprender trigonometria. Organizamos o presente capítulo da seguinte forma: a) o resultado dos alunos diante da alteração de uma metodologia em sala de aula; b) reflexões dos alunos sobre o ensaio como aporte facilitador no ensino da trigonometria.

#### **4.1 O RESULTADO DOS ALUNOS DIANTE DA ALTERAÇÃO DE UMA METODOLOGIA EM SALA DE AULA**

Com base no pré-teste e pós-teste, trazemos a análise dos dados numa perspectiva quantitativa e qualitativa, buscando investigar a História da Trigonometria como um elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno. Vale destacar que utilizamos o mesmo instrumento avaliativo junto aos alunos como pré-teste e pós-teste. O instrumento foi organizado com nove questões, das quais oito objetivas e uma dissertativa. Das questões objetivas, uma versou sobre o conhecimento geral de trigonometria, duas sobre conhecimento histórico geral, uma sobre semelhanças de triângulos, duas questões sobre o Teorema de Pitágoras, porque este Teorema é importante em Trigonometria para definir o eixo do seno, o eixo do cosseno e até para confirmar algumas fórmulas e é, também, importante para o cálculo do seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ), e a oitava questão sobre a transformação de grau para radiano pois o radiano é uma das mais importantes

unidades e é a que mais se faz uso no curso de trigonometria. Quanto à questão dissertativa, indagamos ao aluno se é importante o estudo da História da Matemática paralelo ao estudo dos conceitos de trigonometria e se isso facilitou sua aprendizagem. Os alunos foram submetidos individualmente aos testes com o objetivo de acompanhar a evolução da aprendizagem dos mesmos a partir de uma outra metodologia desenvolvida em sala de aula. A seguir apresentamos os resultados das questões objetivas.

## 4.2 - AS QUESTÕES OBJETIVAS

Destacamos que o ensino de trigonometria é iniciado no 9º ano e além de verificar essa evolução, quanto à aprendizagem, observamos se o aluno teve alguma noção de História da Matemática e o grau de conhecimentos básicos sobre razões trigonométricas do triângulo retângulo.

Em todas as questões apontamos o objetivo específico da questão, ou seja o que pretendíamos avaliar com cada questão, e as conclusões encontradas no pré- teste e pós -teste. Lembramos que foram avaliados 21 alunos.

### 4.2.1 - ANÁLISE DA QUESTÃO 1

1) A Matemática consta de algumas partes dentre elas a aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria. Quanto a trigonometria, você a entende como:

- A) Estuda os números
- B) Estuda os ângulos
- C) Estuda a circunferência
- D) Estuda o triângulo retângulo

**Tabela 4.1** - Resultados da Questão 1

Pré-Teste					Pós-Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	<b>B</b>	C	D	Branco	A	<b>B</b>	C	D	Branco
1	<b>10</b>	0	8	2	0	<b>12</b>	0	8	1
4,7%	<b>47,6%</b>	0%	38,2%	9,5%	0%	<b>57,1%</b>	0%	38,2%	4,7%

Nossa intenção com essa questão era verificar o conhecimento do aluno sobre o significado da palavra trigonometria. No 9º ano é apresentado ao aluno o conteúdo razões

trigonométricas no triângulo retângulo, que tem entre outros objetivos, o estudo dos ângulos. Os primeiros rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia.

Verificamos que no pré-teste, um pouco menos da metade da turma acertou a alternativa "B". O percentual alto de respostas para a alternativa "D", sugere que os alunos que assinalaram esta, o fizeram por estarem mais familiarizados com o estudo do triângulo retângulo. Já no pós-teste, o resultado apresenta uma suave melhora no percentual de acertos, mas nos parece que ainda perdura a familiaridade com triângulo retângulo.

#### 4.2.2 - ANÁLISE DA QUESTÃO 2

2) Quanto a origem dos assuntos abordados em Trigonometria pode-se afirmar que esses tiveram origem:

- A) Na idade antiga
- B) Na idade média
- C) Na idade moderna
- D) Na idade contemporânea

**Tabela 4.2 - Resultados da Questão 2**

Pré-Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
12	5	1	0	3	15	6	0	0	0
57,1%	23,9%	4,7%	0%	14,3%	71,4%	28,6%	0%	0%	0%

Nossa intenção com esta questão é perceber se o aluno tem alguma noção de quando a trigonometria surgiu. Como ela é um assunto estudado no 9º ano, acredita-se que o aluno já possua a noção sobre sua origem ao adentrar o ensino médio.

No pré-teste, dos vinte e um alunos pesquisados, um pouco mais da metade mostrou conhecimento esperado sobre a idade do surgimento da trigonometria. O resultado sugere que 43% dos alunos não mostraram o conhecimento esperado.

Porém, no pós-teste o resultado apresenta uma suave melhora no percentual de acertos e, mesmo com a utilização do ensaio, enquanto material didático facilitador de uma ação mais ativa do aluno, com suas indagações e questionamentos, ainda um terço dos alunos não mostrou o conhecimento esperado sobre a data de origem da trigonometria.

### 4.2.3 - ANÁLISE DA QUESTÃO 3

3) Muitos são os feitos creditados ao filósofo e Matemático Tales de Mileto. Assinale a opção que corresponde a um desses feitos:

- A) A descoberta da função seno
- B) A previsão de um eclipse
- C) A descoberta de que o quadrado da hipotenusa de um triângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos
- D)  $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$

**Tabela 4.3 - Resultados da Questão 3**

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
6	0	11	1	3	4	3	11	3	0
28,6%	0%	52,3%	4,7%	14,3%	19%	14,3%	52,3%	14,3%	0%

Nossa intenção com esta questão é verificar o conhecimento histórico, que o aluno tem, sobre Tales de Mileto, já que o estudo sobre ele é iniciado no 9º ano, quando se estuda o conteúdo congruência e semelhança.

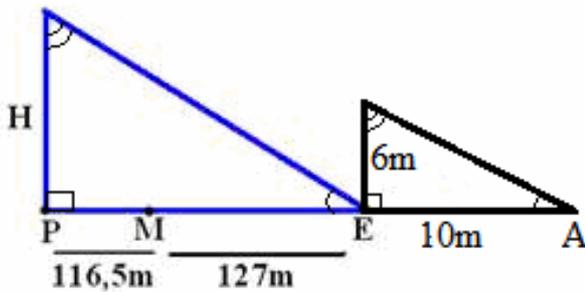
O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles Tales de Mileto ( 625 - 546 a.C.), com seus estudos sobre semelhanças que embasaram a trigonometria.

No pré-teste, o resultado sugere que nossos alunos não tinham conhecimentos históricos sobre Tales de Mileto e que os 52,3% que assinalaram "C" provavelmente confundiram Tales com Pitágoras, pois os dois estudaram triângulos. Porém, Tales utilizou nos seus estudos semelhança de triângulos e Pitágoras utilizou triângulo retângulo. Concluimos, então, que os alunos não dominaram o conhecimento histórico sobre Tales de Mileto.

Percebemos no pós-teste, que o resultado evidencia uma melhora, não significativa, no percentual de acertos e, mesmo com a utilização do nosso Ensaio, enquanto material didático, nos parece que ainda permanece a falta de clareza sobre os estudos de Pitágoras, pois Tales trabalhou semelhança de triângulos e Pitágoras com triângulo retângulo. Concluimos que não houve desenvolvimento no conhecimento histórico sobre Tales de Mileto.

4.2.4 - ANÁLISE DA QUESTÃO 4

4) São dados dois triângulos abaixo. Encontre a altura H do triângulo maior



- A)  $H = 145,9\text{m}$
- B)  $H = 146,0\text{m}$
- C)  $H = 146,1\text{m}$
- D)  $H = 146,2\text{m}$

Tabela 4.4 - Resultados da Questão 4

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
0	5	10	2	4	0	1	20	0	0
0%	23,8%	47,6%	9,5%	19,1%	0%	4,7%	95,3%	0%	0%

Nesta questão, procuramos de maneira objetiva, observar se o aluno tem ou não a noção de semelhança de triângulos.

Observando o pré-teste, vimos que do universo de vinte e um alunos, um pouco mais da metade não mostrou o conhecimento esperado, ou seja, pela nossa experiência podemos dizer que geralmente a semelhança de triângulos é um conteúdo desenvolvido no 8º ano, que dá base à introdução da trigonometria no triângulo retângulo, no 9ºano. Podemos supor que os 37% que assinalaram "B" ou "D" podem ter tido dificuldades nos cálculos, o que não nos permite concluir o desconhecimento relacionado à semelhança de triângulos.

No pós-teste, o resultado sugere que a totalidade, menos um aluno, mostrou o conhecimento esperado sobre a semelhança de triângulos. Vale ressaltar que o pós-teste foi realizado após a leitura e questionamento do Ensaio, como estratégia das nossas aulas, que

oportuniza a participação ativa dos alunos. O Ensaio foi um material didático que auxiliou no desenvolvimento da trigonometria em relação às funções seno e cosseno.

#### 4.2.5 - ANÁLISE DA QUESTÃO 5

5) A afirmativa abaixo que corresponde a um terno pitagórico é...

- A)  $x + 2$  ,  $y + 2$  e  $z + 2$
- B)  $2x$  ,  $2y$  e  $2z$
- C)  $x - 2$  ,  $y - 2$  e  $z - 2$
- D)  $x/2$  ,  $y/3$  e  $z/2$

**Tabela 4.5** - Resultados da Questão 5

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
1	6	1	4	9	2	12	1	3	3
4,7%	28,6%	4,7%	19%	42,8%	9,5%	57,1%	4,7%	14,3%	14,3%

Com essa questão, pretendíamos verificar se o aluno tem conhecimento dos conceitos de terno pitagórico, pois é um assunto abordado em Teorema de Pitágoras, no 9º ano.

Percebemos, no pré-teste, que como não é um assunto com muito destaque no conteúdo sobre Teorema de Pitágoras, presume-se que os 43% que deixaram de responder as alternativas desconheciam o que é terno pitagórico e, provavelmente, 28% que assinalaram "A" , "C" ou "D" não mostraram o conhecimento esperado.

Porém, no pós-teste, após a leitura do Ensaio, enquanto material didático facilitador, mais da metade dos alunos mostrou o conhecimento esperado sobre terno pitagórico e os 29% que assinalaram "A" , "C" ou "D" não mostraram o conhecimento esperado.

#### 4.2.6 - ANÁLISE DA QUESTÃO 6

6) Quanto ao triângulo retângulo, pode-se afirmar que nele...

- A) O quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado da soma dos catetos
- B) A soma dos quadrados da hipotenusa e de um cateto é igual ao quadrado do outro cateto
- C) A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

- D) A diferença dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

**Tabela 4.6** - Resultados da Questão 6

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
8	0	12	0	1	8	0	13	0	0
38,1%	0%	57,1%	0%	4,7%	38,1%	0%	61,9%	0%	0%

Esta pergunta aborda o conhecimento do aluno sobre as relações métricas no triângulo retângulo, em especial, o Teorema de Pitágoras, isto porque para a aprendizagem da definição de seno e cosseno é imprescindível a compreensão deste Teorema. Mas quem foi Pitágoras? Considerando o estudo historiográfico da trigonometria, de acordo com Boyer (2010), Pitágoras de Samos (570-495 a.C.), foi discípulo de Tales de Mileto e conjectura-se que ele tenha feito a 1ª demonstração do teorema que leva seu nome: "Em todo triângulo retângulo, o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos" (EVES, 2008, p.103).

No pré-teste, um pouco mais da metade dos alunos acertou a alternativa "C". Podemos inferir que, provavelmente, aqueles que assinalaram a alternativa "A", fizeram uma interpretação equivocada em relação a "soma dos quadrados" e o "quadrado da soma", isto porque a 1ª expressão  $x^2 + y^2$  é diferente da segunda expressão  $(x + y)^2$ , onde x e y são catetos de um triângulo retângulo, enquanto no pós-teste o resultado evidencia uma melhora no percentual de acertos, mas nos parece que ainda perdura o equívoco em relação às expressões "soma dos quadrados" e "quadrado da soma".

Se faz necessário considerar que, mesmo com a utilização do Ensaio, enquanto material didático facilitador de uma ação mais ativa do aluno, com suas indagações e questionamentos, não observamos a superação do referido equívoco. Esses obstáculos são como desafios que abrem ao professor a possibilidade em corrigir os desvios, através de estratégias que promovam o diálogo aluno/professor.

Como destaca Cajazeiras (2011), a diversidade de material didático propicia maior eficiência no ensino e possibilita ao professor e ao aluno refletirem sobre seus equívocos. Esse pode ser um dos caminhos para a construção do conhecimento.

#### 4.2.7 - ANÁLISE DA QUESTÃO 7

7) Transformando-se 22° 30' em segundos, encontramos:

- A) 79000 seg
- B) 81000 seg
- C) 82000 seg
- D) 83000 seg

Tabela 4.7 - Resultados da Questão 7

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
1	10	3	1	6	0	16	2	1	2
4,7%	47,6%	14,3%	4,7%	28,5%	0%	76,2%	9,5%	4,7%	9,5%

Com esta questão queremos saber do conhecimento do aluno sobre as transformações das unidades de medidas de grau para minuto e de minuto para segundo. Este conteúdo é desenvolvido no 8º ano e o mesmo é imprescindível para o desenvolvimento de trigonometria no triângulo retângulo, no 9º ano.

Do nosso universo, que foi de 21 alunos, menos da metade mostrou o conhecimento esperado no pré-teste. Podemos supor que os 24% que assinalaram "A", "C" ou "D" podem ter tido alguma dificuldade nos cálculos, o que não nos permite concluir que possa existir o total desconhecimento relacionado a transformação de unidades de medida de grau para minutos e segundos. O que sugere para os 28% que não assinalaram nenhuma opção de resposta é que, provavelmente, esse grupo de alunos possa não ter visto esse conteúdo.

Já no pós-teste, três quartos dos alunos acertaram a alternativa "B", sugerindo que o conhecimento esperado foi alcançado. Podemos inferir que, provavelmente, aqueles que assinalaram as alternativas "C" ou "D", podem ter dificuldades nos cálculos, já que durante nossas aulas de trigonometria, este conteúdo foi apresentado.

## 4.2.8 - ANÁLISE DA QUESTÃO 8

8) Transformando  $300^\circ$  em radianos, encontramos:

- A)  $5/2 \pi$  rad
- B)  $5/4 \pi$  rad
- C)  $2/3 \pi$  rad
- D)  $5/3 \pi$  rad

Tabela 4.8 - Resultados da Questão 8

Pré -Teste					Pós -Teste				
Percentual de respostas às alternativas					Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	Branco	A	B	C	D	Branco
1	2	3	7	8	0	1	0	20	0
4,7%	9,5%	14,3%	33,3%	38,1%	0%	4,7%	0%	95,3%	0%

A intenção dessa questão era verificar o conhecimento do aluno sobre a transformação da unidade de medida de grau para o radiano.

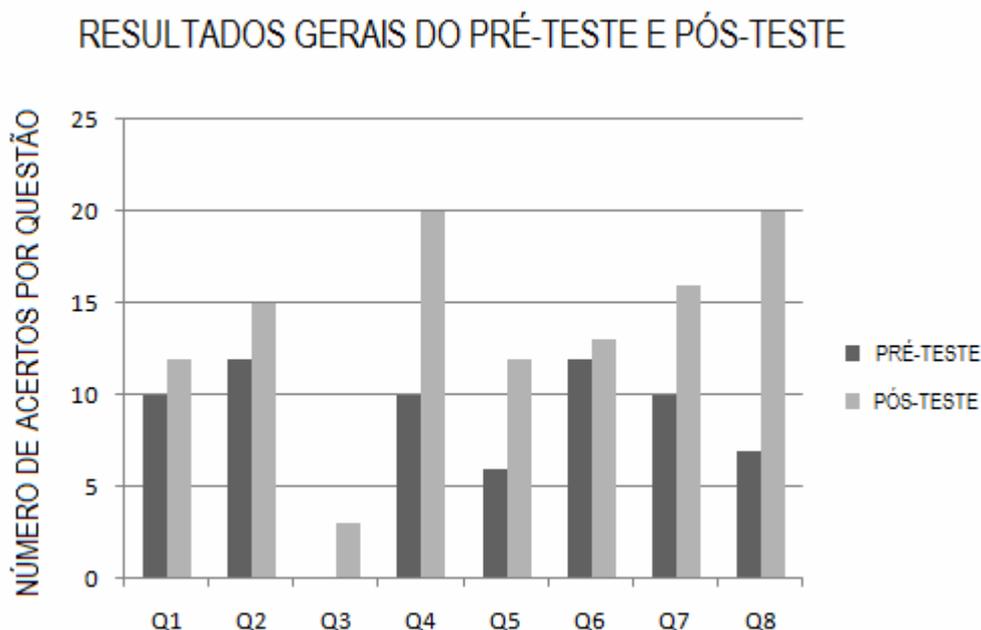
Um importante conceito no desenvolvimento da trigonometria é o conceito de ângulo (grau ou radiano) e de como efetuar sua medida, suas transformações de grau para radiano e vice-versa, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em triângulos retângulos.

Vimos no pré-teste, que um terço da turma acertou a alternativa "D" e 38% desse mesmo grupo não respondeu a nenhuma opção. Este resultado nos sugere que aqueles que não assinalaram nenhuma opção, provavelmente, desconheciam este conteúdo que é ensinado no 9º ano. Aqueles que assinalaram o item "C", presume-se que não tenham assimilado esse conteúdo e aqueles que responderam "A" ou "B" podem ter tido dificuldades nos cálculos.

No pós-teste, o resultado sugere que a totalidade, menos um aluno, mostrou o conhecimento esperado sobre transformações de grau em radianos. Vale ressaltar, mais uma vez, que o pós-teste foi realizado após a leitura e questionamento do Ensaio como estratégia das nossas aulas que oportunizou a participação ativa dos alunos.

#### 4.2.9 RESULTADOS DAS QUESTÕES OBJETIVAS, UMA ANÁLISE ESTATÍSTICA

Ficou claro verificar que após o Ensaio os resultados das questões objetivas foram melhores, fazendo uma análise gráfica do pré-teste e do pós-teste notamos um aumento no número de questões acertadas, conforme podemos observar no gráfico abaixo:



**GRÁFICO 4.1** - Resultados Gerais do Pré-Teste e Pós-Teste

Para comparar as médias de pré-teste e pós-teste do desempenho dos alunos na importância da História da Trigonometria como facilitadora da aprendizagem das funções seno e cosseno, foi utilizado o teste t de Student para médias correlacionadas, com alpha fixado em 0,01. O pré e o pós-testes foram tratados descritivamente, usando-se frequências, proporções e percentuais.

Para pequenas amostras ( $N \leq 30$ ), a escolha do teste t de Student tem sido indicado por diversos autores (Kerlinger, 1980; Pestana e Gageiro, 2000) para a comparação de duas amostras pareadas ou de um mesmo grupo submetido a duas condições diferentes. Em ambos os casos, é necessário que sejam obtidas duas medidas de uma mesma variável para comparação da média obtida por cada grupo ou da média obtida por um mesmo grupo em duas situações distintas.

A amostra pareada é obtida quando a partir de um único grupo o pesquisador dá origem a dois grupos. Um exemplo seria a comparação do desempenho de dois grupos de

alunos que são da mesma turma e que foram divididos em dois subgrupos em função do resultado de um teste de inteligência. Assim, o pesquisador teve como objetivo garantir que os dois subgrupos não teriam índices de inteligência diferenciados. Já para um mesmo grupo submetido a duas condições diferentes, podemos exemplificar o nosso estudo, onde, utilizamos o mesmo grupo de alunos em dois momentos, antes da aplicação da experiência e depois.

O teste  $t$  de Student ou somente teste  $t$  é um teste de hipótese que usa conceitos estatísticos para rejeitar ou não uma hipótese nula, desde que o objeto do teste siga uma distribuição  $t$  de Student. Ele consiste em usar os dados da amostra para calcular a estatística  $t$  e depois compará-la com a distribuição  $t$  de Student para identificar a probabilidade de se ter obtido o resultado observado, caso a hipótese nula seja verdadeira. A importância deste teste está em que a distribuição  $t$  de Student surge naturalmente a partir de variáveis aleatórias que seguem a distribuição normal, quando sua média e sua variância são desconhecidas.

De uma forma geral, de acordo com Levin (1997), o Teste de hipótese é usado quando se tem duas amostras extraídas da mesma população e permite avaliar a factibilidade de proposições, afirmativas ou alegações sobre determinado parâmetro estatístico. A Estatística  $t$ , também chamada de teste  $t$ , é um teste estatístico para médias.

O  $t$  de Student surgiu, segundo o site: [econometricum.blogspot.com/2010/02](http://econometricum.blogspot.com/2010/02), durante o começo do século XX, quando a cervejaria Guinness resolveu investir pesadamente em ciências, e acabou contratando Willian Sealey Gosset, que acabara de se graduar em Oxford, em Matemática e Química. Na época, houve indagações quanto a necessidade de se contratar um matemático e o que ele agregaria a uma cervejaria ou que tipo de problema matemático uma cervejaria teria que resolver. Por outro lado, um matemático era a pessoa indicada para calcular qual a quantidade ótima de levedo (organismos vivos que se multiplicam com o tempo) deveria colocar na cerveja, de modo a alcançar a fermentação desejada.

Gosset percebeu que o número de levedos por litro seguia uma distribuição de Poisson e queria publicar tal descoberta. Entretanto, a política da Guinness era de não permitir seus funcionários de publicarem técnicas desenvolvidas dentro da empresa, de modo a evitar que a concorrência copiasse suas técnicas.

A saída para Gosset, que era amigo de Pearson, um dos editores da *Biometrika* naquele tempo, foi publicar suas pesquisas sobre o pseudônimo de Student, de modo que a Guinness não ficasse sabendo. Por isso o  $t$  de Student.

O rendimento dos 21 (vinte e um) estudantes do 2º período, do 1º ano do ensino médio, em um mesmo teste de resposta construída, com oito itens (Apêndice 1) que tinha por objetivo verificar a aprendizagem específica de conhecimentos básicos sobre as funções seno e cosseno; que foi aplicado antes e depois de vivenciarem a experiência de ensino-aprendizagem, porque articula uma forma de ensino convencional ao conhecimento da História da Trigonometria, focalizada em texto especificamente por nós preparado, sob a forma de um Ensaio, para estudo individualizado, no contraturno das aulas, foi apresentado na Tabela 4.9 a seguir:

**Tabela 4.9**

Comparação dos Escores Obtidos pelo Grupo de Estudantes, Antes e Após uma Experiência de Ensino-Aprendizagem na área de Matemática com a Utilização do Teste *t* de Student, para Amostras Pareadas

SITUAÇÕES	MEDIAS DO GRUPO	DP	ERRO PADRÃO DE MEDIDA	<i>T</i>
Antes da Experiência	3,929	1,988	0,434	5,839*
Após a Experiência	6,607	1,1195	0,261	

\* Significativo ao nível de 0,01

Cabe ressaltar que, a variação no desvio padrão da amostra, antes da experiência, foi de **1,988**, demonstrando uma amostra heterogênea, ou seja, com uma maior variação entre os conceitos obtidos pela turma e, posteriormente ao tratamento, o desvio padrão observado foi de **1,119**, demonstrando que, após a experiência, a amostra tornou-se mais homogênea em relação ao período pré-teste, sendo assim, após a experiência, o grupo tendeu a estar mais próximo conceitualmente.

Observando-se o critério vigente na Escola - *locus* da pesquisa, que é de 60% necessário (ponto de corte) para o reconhecimento de que houve aprendizagem por parte dos alunos, o resultado supra – no **pré-teste** indica aprovação de um percentual médio da turma muito abaixo do necessário para garantir aprovação, enredando aí a necessidade daquela turma realizar os estudos cujo conteúdo o teste focalizava, uma vez que essa média ficou em 3,929. A análise individualizada do desempenho permite assinalar que três alunos poderiam ter sido dispensados de realizar a experiência, já que apresentaram no pré-teste um desempenho igual ou superior ao ponto de corte.

Ao passo que no **pós-teste** a média de rendimento da turma aumenta para 6,607, portanto, acima do ponto de corte; evidenciando um nível de domínio que não chega a ser

festejável ou pedagogicamente desejável, uma vez que a média ainda ficou distante do escore máximo (dez).

Conforme pode ser observado, na tabela anterior, existe diferença significativa entre as duas situações do grupo constituído por 21 estudantes – que realizou o pré e o pós-teste; resultando em um teste  $t$  de 5,839; com  $\alpha$  fixado em 0,01, sendo a maior média obtida pelo grupo após o tratamento, ou seja, a experiência pedagógica pela qual passaram, fez diferença expressiva na aprendizagem em seu desempenho. Tal resultado indica que houve um progresso do grupo, após ter passado pela experiência pedagógica – que consistiu no ensino convencional ministrado ao grupo em sala de aula e o estudo de um Ensaio no contraturno de suas aulas, cujo estudo passou a ser referenciado, e incentivado constantemente, em sala de aula.

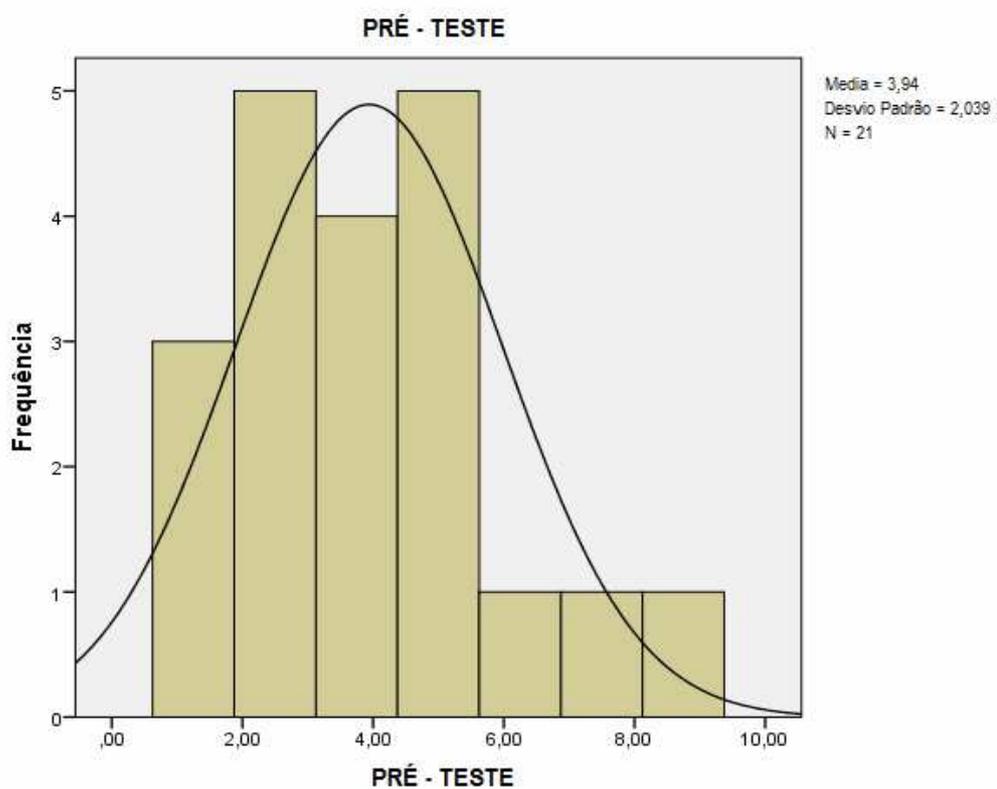
Tais resultados foram detalhados ou refinados estatisticamente nos termos em que evidencia a tabela 4.10 seguinte:

**Tabela 4.10**

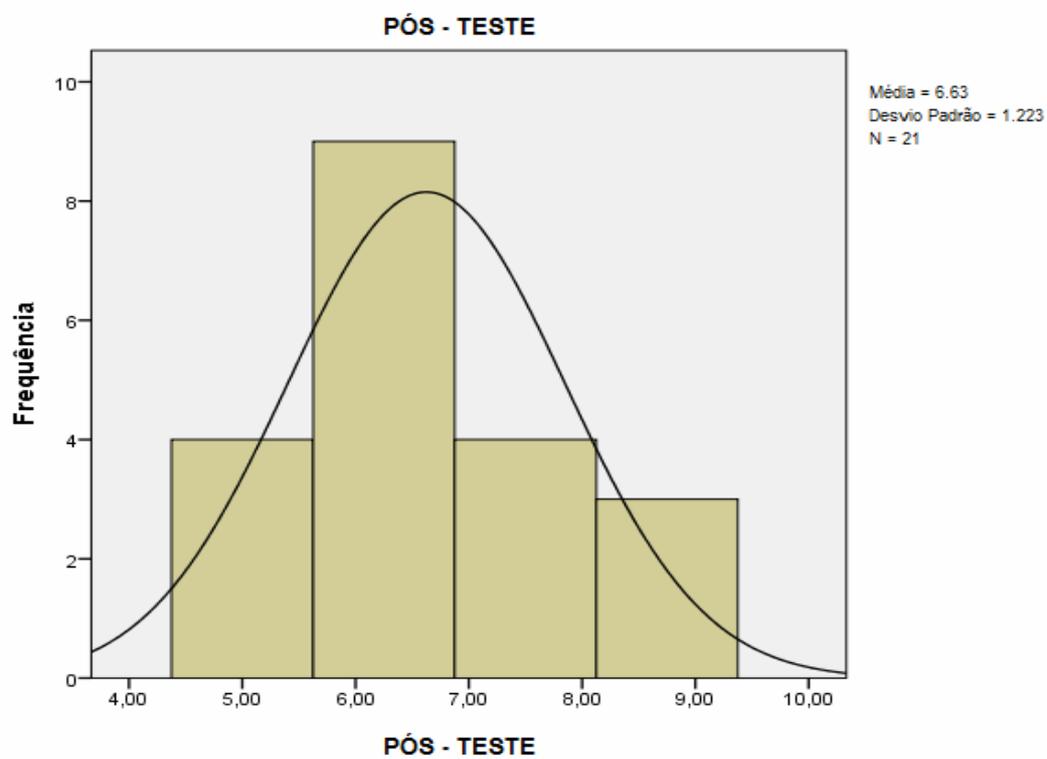
Teste de amostras emparelhadas comparando médias obtidas por alunos em pré e pós-teste, aplicado antes e após terem sido submetidos a uma experiência de ensino-aprendizagem na área de matemática

	Diferenças emparelhadas					$T$	Df	Sig. (2 extremidades)
	Média	Desvio Padrão	Erro Padrão Da média	95% intervalo de confiança				
				Inferior	Superior			
Par 1 Préteste - Pósteste	-2,67857	2,10229	0,45876	-3,63552	-1,72162	-5,839	20	0,000

Df: grau de liberdade



**GRÁFICO 4.2** - Resultado do Pré-teste



**GRÁFICO 4.3** - Resultado do Pós-teste

Ao se focalizar o ponto de corte, definido em 60% do rendimento – mínimo necessário para aprovação no sistema de ensino do IFRJ, no qual a experiência foi realizada, o resultado no teste  $t$  foi ratificado, conforme o evidenciam as tabelas anteriores.

Portanto, os ganhos de aprendizagem estudantil em função da metodologia de ensino que conjugava o ensino convencional de trigonometria com o estudo apartado, paralelo da História da Trigonometria, estão indiciados no quadro acima, de modo específico no teste  $t$  de Student, revelando a existência de diferença significativa entre os dois grupos, pois a maior média obtida pelo grupo foi no pós-teste. Tal resultado indica que houve um progresso do grupo desde a aplicação do pré-teste.

### 4.3 - A QUESTÃO DISSERTATIVA

A avaliação (pré-teste e pós-teste) usada foi dividida em duas partes onde na segunda havia uma questão dissertativa que se tratava de uma questão investigativa e indagava se o aluno considera importante conhecer a História da Matemática, paralelamente ao estudo de trigonometria, para facilitar a aprendizagem dos conteúdos de trigonometria e Por que? (Apêndice 2).

A seguir, apresentaremos os posicionamentos dos 21 alunos participantes através do quadro 4.1, onde encontram-se todas as respostas dos alunos participantes no pré e pós-testes, dando uma visão geral dos posicionamentos dos alunos. As células em branco representam a não participação do aluno nesta questão.

Portanto, o posicionamento de todos os estudantes participantes do estudo na questão dissertativa ou subjetiva integrante do teste, aplicado antes e após a experiência pedagógica, foi registrado no Quadro 4.1 seguinte:

#### Quadro 4.1

##### Posicionamento Estudantil no Teste Sobre o Uso da História da Matemática no Processo de Ensino de Trigonometria - Uma Visão Geral

ESTUDANTES COM DUAS MANIFESTA ÇÕES	POSICIONAMENTO	
	ANTES DA EXPERIÊNCIA	APÓS A EXPERIÊNCIA
A	-	Sim, pois assim obtemos mais conhecimento daquilo que estamos estudando. Apesar de não ter funcionado comigo, pois li o livro da História da Trigonometria inteiro e

		ainda assim tive um baixo rendimento na prova (o que eu não esperava), foi interessante conhecer como surgiu e quem colaborou para que esta existisse nos dias atuais.
<b>B</b>	Eu acho que seria interessante, assim veríamos como foi e <b>é importante</b> a trigonometria e veríamos também a utilidade disto tanto antigamente quanto nos dias de hoje.	Eu <b>não</b> considero de extrema importância, mas achei interessante este estilo de aprendizagem. Porque assim tentaríamos resolver problemas que marcaram a história da matemática.
<b>C</b>	-	Sim. Pois facilita o entendimento das questões e aplicações de tal fórmula na matemática.
<b>D</b>	-	A matemática é uma matéria fundamental para os grandes feitos, e conhecer a história da matemática nos ajuda a entender melhor a matéria e até mesmo nos ajuda a lembrar das fórmulas ou teoremas mais facilmente, pelo fato de nós termos aprendido a história que gerou estes fatos.
<b>E</b>	-	-
<b>F</b>	Não. Pois torna-se cansativa a matéria com isso nós alunos que possuem maiores dificuldade podem não compreender bem; e com isto não tendo bom rendimento.	Sim. Pois com o conhecimento da história vamos ver como a trigonometria surgiu e assim compreender em que parte da história foi necessário seu uso ou onde seu uso ajudou a acrescentar algo a mais a humanidade.
<b>G</b>	Sim, pois conhecendo um pouco da história ajudaria a compreender melhor o que está sendo dado.	Sim, pois facilita o aprendizado e torna a matéria mais interessante por saber um pouco mais sobre sua história.
<b>H</b>	Eu considero importante, <b>sim</b> , pois aprender nunca é demais para quem quer estudar.	Sim. Pois nos ajuda a ampliar mais o nosso conhecimento sobre a matemática.
<b>I</b>	-	Sim, pois sabendo a história podemos ver qual foi a linha de raciocínio usado para resolver a questão.
<b>J</b>	Sim, pois entendemos como os matemáticos chegaram a conclusão das fórmulas e para que usavam.	Sim, pois assim sabemos como os matemáticos descobriram tal fórmula, o porque dessa descoberta e como aplicavam em seu dia a dia.
<b>K</b>	Sim. Pois conhecendo a história da matemática a aula fica mais dinâmica e dá mais vontade de aprender.	Sim. Pois compreendendo a história, a compreensão da matéria e das explicações ficam mais fáceis de entender.
<b>L</b>	<b>Sim</b> . Pois a matemática em si, é muito interessante em todas as áreas (aritmética, álgebra, geometria), se a trigonometria é mais um complemento para um melhor estudo meio matemático. Adoro matemática	Porque a trigonometria por ser uma parte fundamental da matemática é <b>superimportante</b> na compreensão dos ângulos, não só de triângulo mas também, de um círculo.
<b>M</b>	-	Sim. Quem se aprofundar muito para não perder o foco da matemática que é

		resolver cálculo. É interessante estudar como chegamos a tais conhecimentos.
<b>N</b>	-	Sim. Pois assim facilita aplicar as fórmulas e cálculos necessários, porque sabendo a lógica que foi preciso para desenvolver.
<b>O</b>	-	Sim, conhecendo a história e os eventos que levaram ao descobrimento de tal função é crucial para o entendimento da matéria e sua importância.
<b>P</b>	-	Sim, após ter um pequeno conhecimento da história da trigonometria, ficou mais fácil responder algumas das questões acima.
<b>Q</b>	-	Não, porque eu não acho que isso vá facilitar o aprendizado. Pelo menos não o meu.
<b>R</b>	Sim, porque através disso conhecemos o passo a passo da trigonometria.	Sim, porque através dela podemos ver como surgiu cada elemento da matemática, melhorando nossa forma de raciocínio.
<b>S</b>	Sim, pois o contexto histórico, e consequentemente de origem, da matéria estudada possibilita maior compreensão geral da trigonometria, facilitando assim o seu melhor entendimento.	Sim, pois o contexto histórico facilita a compreensão, porque por esse meio fica mais fácil e menos obrigatório a aprendizagem.
<b>T</b>	-	Não considero importante, pois não é necessário conhecer o contexto histórico para calcular. Acho que, quem se interessar, deveria pesquisar sobre isto.
<b>U</b>	-	Sim, pois através da história é possível descobrir que tais funções não vieram do nada.

As células em branco são aquelas as quais os alunos não deram nenhuma resposta.

Observando o quadro de registros, constata-se que do total de (vinte e um) estudantes, nove (9) se manifestaram antes e após a experiência; onze (11) deles só se manifestaram após a experiência e um (1) aluno deixou em branco a questão subjetiva, em ambos os momentos de aplicação do teste, ainda que tenha respondido as outras questões.

Dos nove estudantes, que permitiram comparação acerca de seus posicionamentos, verificamos que sete (7) afirmam e confirmam que é importante o estudo da História da Matemática paralelo ao estudo da trigonometria para a aprendizagem; um discorda antes e concorda depois da experiência e outro concorda antes da experiência e discorda depois. As falas dos sete que integram o grupo que convergem para afirmar tal importância e corroborar os resultados do teste “t”, são apresentadas no Quadro 4.1.

Neste mesmo quadro podemos observar e comparar as respostas dos alunos que responderam no pré-teste e no pós-teste, verificar a mudança de opinião em alguns casos e a concretização de sua opinião favorável em outros casos.

Os onze (11) estudantes que responderam a questão dissertativa somente após a experiência pedagógica, podem ser observados conforme assinalado no quadro 4.1. Embora este grupo de estudantes tenha deixado a questão subjetiva em branco, no pré-teste – impossibilitando comparações de seus posicionamentos; na situação de pós-teste, o grupo dos onze também subdividiu-se, em dois grupos: (a) o que afirma a importância da História da Matemática – constituído por nove (9) deles e (b) o que nega essa importância - dois (2) deles.

O grupo dos nove (9) segue na mesma direção de posicionamentos dos sete (7) focalizados anteriormente, o que nos permite fazer duas considerações: (a) Dos 21 estudantes que passaram pela experiência pedagógica, 16 ratificaram a importância da História da Matemática na aprendizagem de trigonometria, corroborando os resultados do teste “t”, já indicado pelo grupo anteriormente focalizado; e (b) Dentre estes nove estudantes, também é possível verificar que a dispersão em suas falas envolve os mesmos três eixos analíticos de seus pares anteriormente focalizados: (a) aprendizagem; (b) história da matemática como facilitadora da aprendizagem de fórmulas e (c) história da matemática como facilitadora da aprendizagem em outros níveis, para além da memorização tais como: compreensão, entendimento, conhecimento.

Embora as falas da maioria dos estudantes possibilitem fazer essa aglutinação, não se pode falar de convergência efetiva de suas enunciações; pois os termos que sublinhamos em seus posicionamentos supra registrados, são ambíguos, polifônicos, ou seja, não se pode garantir que tenham exatamente o mesmo significado para todos os 16 estudantes.

Conforme abordado no capítulo 1, autores que evidenciam a relevância da História da Matemática enquanto elemento facilitador da aprendizagem de matemática/trigonometria relacionam estes fatores pelas seguintes razões:

(a) oportuniza o desenvolvimento de uma nova visão da matemática e permite ter uma compreensão melhor sobre os conceitos e teorias matemáticas, como afirmam Baroni, Teixeira e Nobre (2005).

(b) as informações históricas contribuem para a melhoria do ensino da matemática (MENDES, 1997);

(c) é possível introduzir nas aulas a contextualização histórica, articulando teoria e prática, salientando a necessidade de se adaptar as informações históricas às necessidades,

desenvolvendo saberes e produzindo conhecimento(SAMPAIO, 2008).

Comparando o teor das falas dos estudantes com estas razões – apresentadas pelos especialistas da área, percebemos que a História da Matemática é um importante instrumento facilitador da aprendizagem dos conteúdos de trigonometria.

Evidente que a fala dos estudantes é desprovida de fundamentação teórica, sendo quase sempre expressão de suas próprias motivações, de suas histórias de envolvimento com a matemática, de seus pré-conceitos (ou pré-concepções) ou mesmo do que Moreira (2011, p.226) nomeia como “pré-disposição para aprender”.

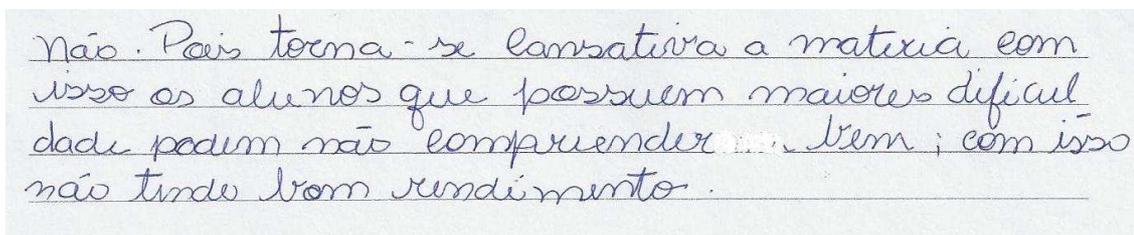
Diante dessas análises, torna-se importante evidenciar que a pesquisa quantitativa nos fornece índices que funcionam como indicadores ou sinalizadores, tanto quanto a pesquisa qualitativa fornece-nos informações que funcionam muito mais como aproximações ou indícios do que como dados precisos. Talvez nisto resida a força e o poder da contribuição de ambas as formas de investigação para a produção de conhecimento.

Em relação à questão dissertativa no pré-teste e pós-teste, com base nas respostas dos alunos, verificamos uma divisão em subgrupos de posicionamentos justificadores da importância do estudo da História da Matemática como facilitador da aprendizagem de trigonometria: (a) Uma discussão sobre a aprendizagem significativa; (b) a História da Matemática como facilitadora da memorização das fórmulas e (c) o uso da História da Matemática como facilitadora da aprendizagem.

É importante assinalar que a análise dos depoimentos dos estudantes pressupõe que seus autores tenham feito a leitura do Ensaio. Entretanto, não se pode afirmar que essa leitura tenha sido feita; portanto, há que se relativizar o peso dessas análises, ainda que considerando o diálogo efetuado com a literatura, para produzi-las.

A pergunta feita foi: Você considera importante conhecer a História da Matemática, paralelamente ao estudo de trigonometria, para facilitar a aprendizagem dos conteúdos de trigonometria? Por que?

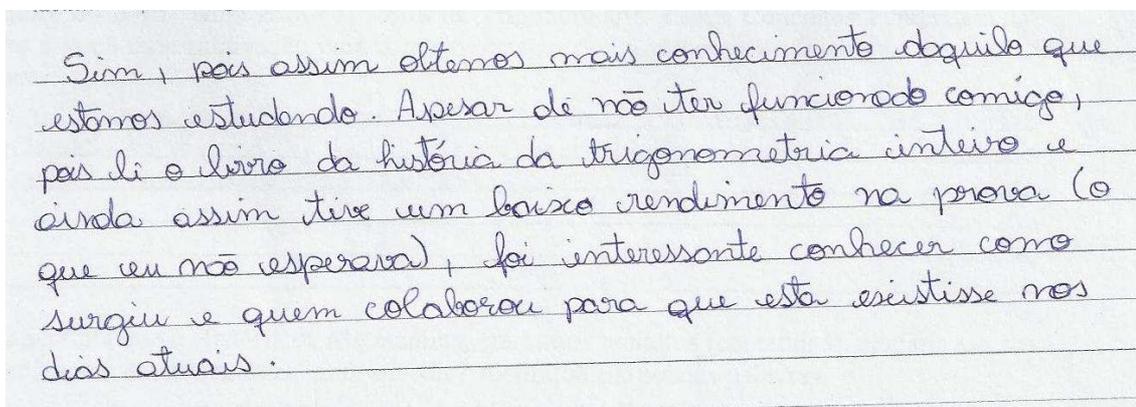
#### 4.3.1 UMA DISCUSSÃO SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA



Não. Pois torna-se cansativa a matéria com isso os alunos que possuem maiores dificuldade podem não compreender bem; com isso não tendo bom rendimento.

**Figura 4.1-** Resposta do aluno F no Pré -Teste.

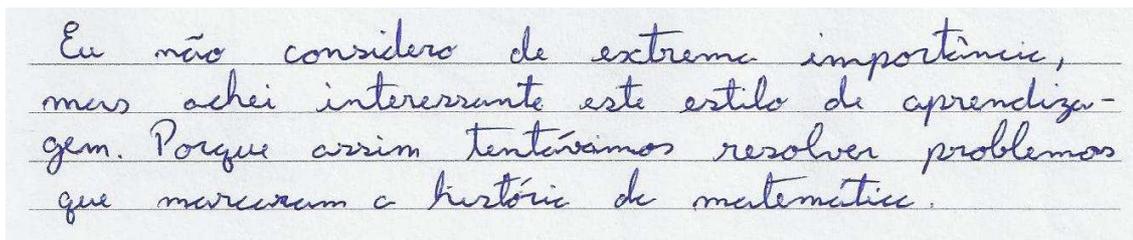
Nos parece que, para este aluno, não há predisposição em conhecer a História da Matemática, pois segundo ele "torna-se cansativa a matéria". O fato de se tornar cansativa, nos parece que a matemática é reduzida a fórmulas e cálculos. Dessa forma, muitas das vezes, nem sempre a mudança de estratégias de ensino, pelo professor, facilita a aprendizagem do aluno. Isso nos leva a pensar sobre a aprendizagem significativa que não se encerra a diversidade de estratégias ou atividades sofisticadas se as mesmas não forem desenvolvidas do modo a promover a participação ativa do aluno, tais como discussões, debates com a mediação do professor, conforme destaca Moreira (2010).



Sim, pois assim obtemos mais conhecimentos daquilo que estamos estudando. Apesar de não ter funcionado comigo, pois li o livro da história da trigonometria inteiro e ainda assim tive um baixo rendimento na prova (o que eu não esperava), foi interessante conhecer como surgiu e quem colaborou para que esta existisse nos dias atuais.

**Figura 4.2-** Resposta do aluno A no Pós -Teste.

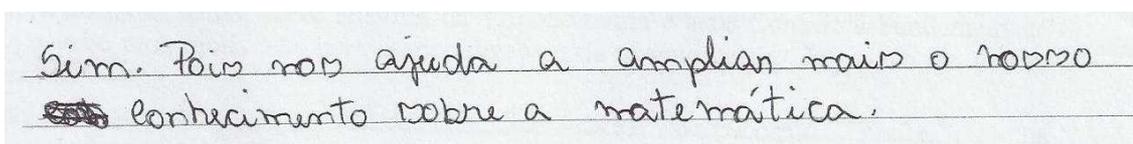
Apesar deste aluno acreditar que não houve uma aprendizagem significativa, pois, segundo ele, "apesar de não ter funcionado comigo, pois li o livro da História da Trigonometria inteiro e, ainda assim, tive um baixo rendimento na prova", nos parece, no comentário seguinte, que ele reconhece a apreensão de um conteúdo ligado à História da Matemática pois, o mesmo aluno, teve predisposição para aprender pois achou "interessante conhecer como surgiu e quem colaborou para que esta existisse nos dias atuais", o que se pode evidenciar no que Baroni, Teixeira e Nobre (2005) dizem: por meio da História da Matemática pode-se verificar que a matemática é uma construção humana, que foi sendo desenvolvida ao longo do tempo e, por assim ser, permite compreender a origem das ideias que deram forma à cultura, como também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que criaram essas ideias e as circunstâncias em que se desenvolveram.



Eu não considero de extrema importância, mas achei interessante este estilo de aprendizagem. Porque assim tentávamos resolver problemas que marcaram a história de matemática.

**Figura 4.3-** Resposta do aluno B no Pós-Teste.

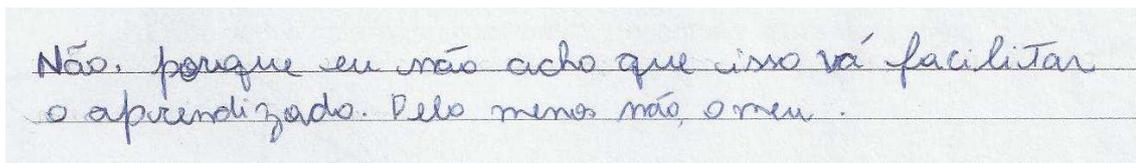
A resposta deste aluno parece indicar um caso de ponderação: embora considere não ser de extrema importância, achou interessante a associação estudo da história com estudo da trigonometria, justificando que essa dinâmica os instigava a fazer a associação entre os acontecimentos que levaram à produção daquele conhecimento trigonométrico e a retomada concreta de situações similares em que ele se envolve resolvendo problemas correlatos. Sua resposta indica certo nível de predisposição para o estudo, embora talvez precisasse de maior apoio ou a diversificação de outras estratégias de ensino-aprendizagem. Considerando que o que fica latente, escondido em sua resposta, põe em relevo a predisposição, tal resposta suscita a fala de SAD (2004) que diz: aumenta a motivação para a aprendizagem e situa a matemática cronologicamente, em relação a sua própria constituição, para poder compreender as condições de sua produção.



Sim. Pois nos ajuda a ampliar mais o nosso ~~o~~ conhecimento sobre a matemática.

**Figura 4.4-** Resposta do aluno H no Pós-Teste.

Pela resposta desse aluno, podemos observar que houve uma aprendizagem, pois ele apresentou uma predisposição para conhecer a História da Matemática, quando diz "pois nos ajuda a ampliar mais o nosso conhecimento sobre a matemática", o que podemos observar no que diz Gowin (1981- Apud Moreira, 2010) que o aluno tem que manifestar uma disposição para relacionar, de maneira não-arbitrária e não-literal, a sua estrutura cognitiva, os significados que capta dos materiais educativos, potencialmente significativos.

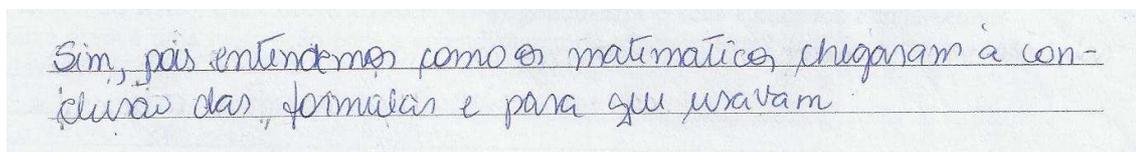


Não, porque eu não acho que isso vai facilitar o aprendizado. Pelo menos não, o meu.

**Figura 4.5-** Resposta do aluno Q no Pós -Teste.

Ao que indica, pela fala do aluno Q, não existiu para ele, predisposição para conhecer a História da Matemática pois, para o mesmo, "isso não vai facilitar a aprendizagem". Não facilitar a aprendizagem, para esse aluno, nos sugere que a História da Matemática pode não ter tido importância para seu aprendizado; ainda que não tenhamos certeza se o aluno leu ou não o Ensaio. Mesmo com a adoção de uma estratégia de ensino diferente da tradicional, para ele esta estratégia não facilitou sua aprendizagem. Este resultado nos leva a pensar em outros métodos para que haja uma aprendizagem, tais como seminários, pesquisas, além da participação ativa do aluno (MOREIRA, 2010).

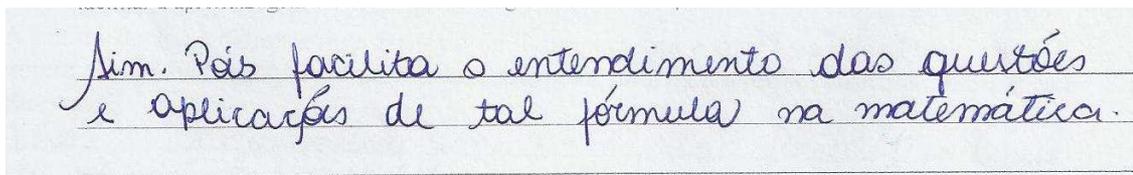
#### **4.3.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FACILITADORA DA MEMORIZAÇÃO DAS FÓRMULAS.**



Sim, pois entendo como os matemáticos chegaram à conclusão das fórmulas e para que usavam.

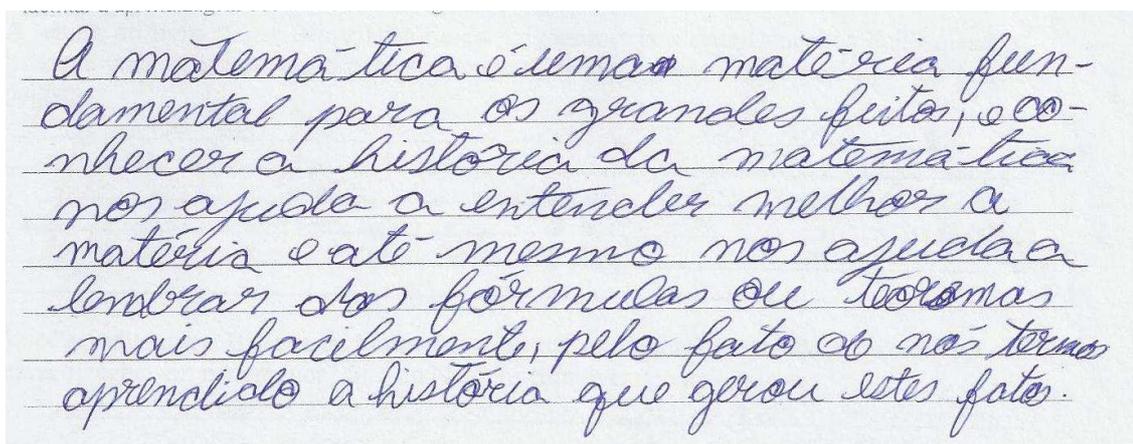
**Figura 4.6-** Resposta do aluno J no Pré -Teste.

É possível identificar a predisposição em conhecer a História da Matemática, interligado ao estudo da trigonometria, na resposta deste aluno, uma vez que para ele é importante entender "como os matemáticos chegaram à conclusão das fórmulas e para que usavam", que nos leva a concluir que o uso da História da Matemática tem, também, como objetivo colocar o aluno em contato com a história da criação do conhecimento da matemática, pois este recurso, além de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas, torna a aprendizagem mais significativa. A História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta facilitadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem daquilo que se almeja (VIANA E SILVA, 2007).

A photograph of a handwritten note on lined paper. The text is written in blue ink and reads: "Sim. Pois facilita o entendimento das questões e aplicações de tal fórmula na matemática."

**Figura 4.7-** Resposta do aluno C no Pós -Teste.

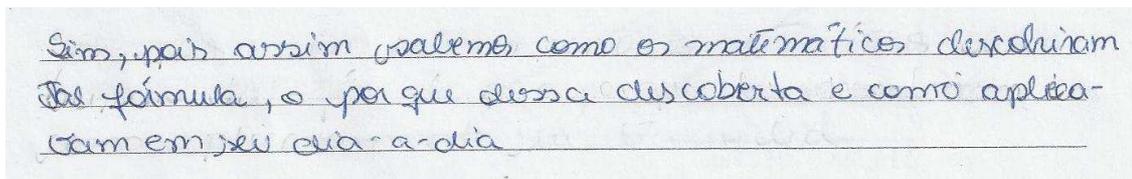
Para este aluno podemos identificar que houve uma predisposição para o conhecimento da História da Matemática, uma vez que ele disse "facilita o entendimento das questões e aplicações de tal fórmula na matemática". Isto nos remete à enunciação de autores como Baroni, Teixeira e Nobre (2005) quando dizem que o estudo da História da Matemática favorece uma melhor compreensão sobre conceitos e teorias matemáticas, favorecendo a melhoria deste ensino e facilitando a contextualização histórica.

A photograph of a handwritten note on lined paper. The text is written in blue ink and reads: "A matemática é uma matéria fundamental para os grandes feitos, e conhecer a história da matemática nos ajuda a entender melhor a matéria e até mesmo nos ajuda a lembrar das fórmulas ou teoremas mais facilmente, pelo fato de nos termos aprendido a história que gerou estes fatos."

**Figura 4.8-** Resposta do aluno D no Pós -Teste.

Na resposta deste aluno, é possível identificar a predisposição para o conhecimento da História da Matemática, uma vez que ele atribui importância desse estudo paralelo para "entender melhor a matéria/disciplina e até mesmo nos ajuda a lembrar das fórmulas ou teoremas". Isso ratifica a enunciação de Baroni, Teixeira e Nobre (2005); Mendes (1997); Sampaio (2008) e Sad (2004) de que o estudo da História da Matemática implica as seguintes contribuições: favorece o desenvolvimento de uma nova visão da matemática; a compreensão melhor sobre conceitos e teorias matemáticas; favorece a melhoria do ensino de matemática; facilita a contextualização histórica, a articulação teoria e prática, a adaptação das informações históricas às necessidades individuais com desenvolvimento de saberes e a produção de conhecimento na área de matemática; bem como disponibiliza um rol de

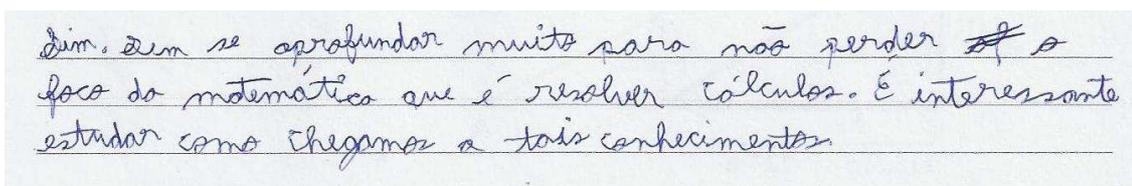
atividades diferentes para além das infundáveis seqüências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas.



Sim, pois assim valemos como os matemáticos descobriram  
da fórmula, o por que dessa descoberta e como aplica-  
ram em seu dia-a-dia

**Figura 4.9-** Resposta do aluno J no Pós -Teste.

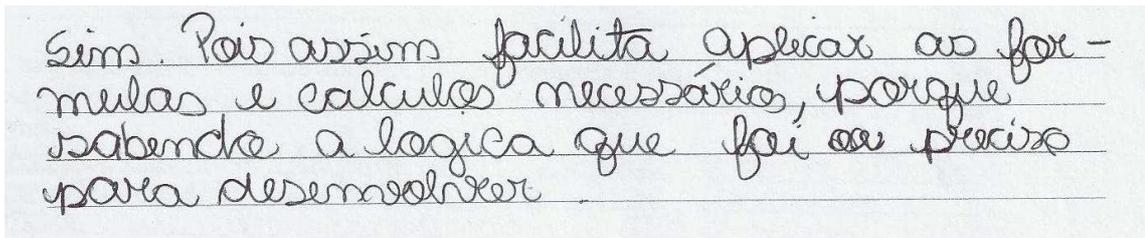
A resposta deste aluno a pergunta sobre a relação entre história da matemática com o processo ensino-aprendizagem de conteúdos da trigonometria fornece indícios de que ele reconhece tal importância, conforme afirmam os PCN's: "Ao revelar a matemática como criação humana em diferentes momentos históricos, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento". (BRASIL, 1998)



Sim, sem se aprofundar muito para não perder ~~o~~  
foco da matemática que é resolver cálculos. É interessante  
estudar como chegamos a tais conhecimentos.

**Figura 4.10-** Resposta do aluno M no Pós -Teste.

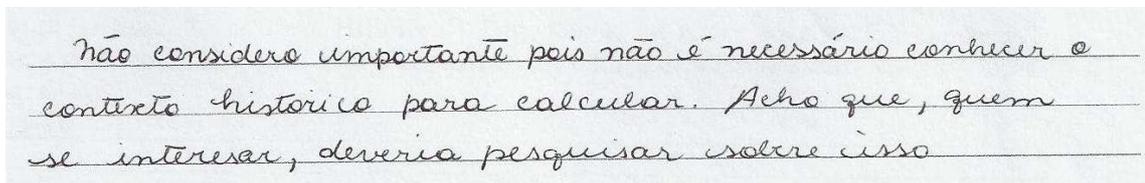
A resposta afirmativa deste aluno ao questionamento feito indica o seu reconhecimento de que, conhecendo o contexto e os acontecimentos que levaram a produzir determinado conhecimento, o aluno ganha, lucra, ou tenha facilidade, sobretudo, a sua capacidade de efetuar cálculo que é um dos objetivos fundamentais na disciplina. Portanto, sua resposta valida Viana e Silva (2007) que a História da Matemática pode ser usada como ferramenta facilitadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja. O maior ganho dessa forma de utilizar a História da Matemática na Educação Matemática é a possibilidade de discutir-se crenças, emoções e afetos envolvidos na prática em que tal criação ocorreu.



Sim. Pois assim facilita aplicar as fórmulas e cálculos necessários, porque sabendo a lógica que foi ao preciso para desenvolver.

**Figura 4.11-** Resposta do aluno N no Pós -Teste.

A confirmação do aluno de que a História da Matemática facilita a aprendizagem de conteúdos relativos à trigonometria interligada a sua justificativa de que “assim facilita aplicar as fórmulas e cálculos necessários” incorre em situação semelhante ao aluno anterior, ainda que o restante de sua resposta tenha ficado incompleta, pode-se dizer que se trata de mais um caso que confirma as ideias de D'Ambrósio (2006) onde diz que a História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias ou práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas no contexto específico de sua época. A utilização da História da Matemática no Ensino da Matemática é um poder motivador que promove o despertar do interesse do aluno, podendo ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino aprendizagem da matemática atual.

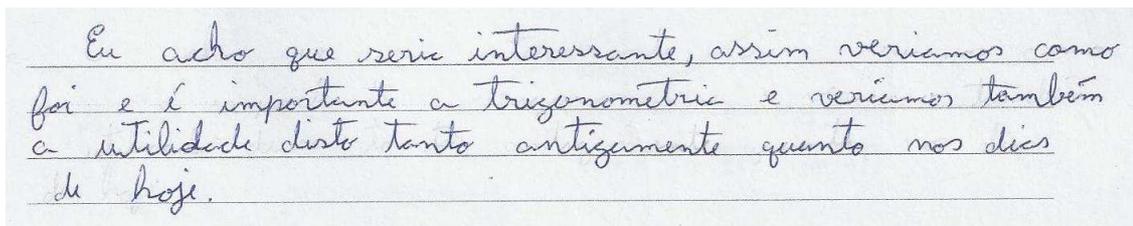


não considero importante pois não é necessário conhecer o contexto histórico para calcular. Acho que, quem se interessar, deveria pesquisar sobre isso

**Figura 4.12-** Resposta do aluno T no Pós -Teste.

Aqui, o aluno não acredita que a História da Matemática possa facilitar o ensino de trigonometria, isso porque "não é necessário conhecer o conteúdo histórico para calcular", porém vale lembrar que insucessos acumulados podem se tornar obstáculos para novas aprendizagens, conforme afirmações de Moreira (2011).

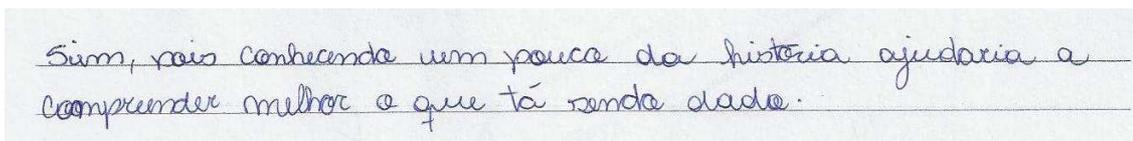
### **4.3.3 O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FACILITADORA DA APRENDIZAGEM**



Eu acho que seria interessante, assim veríamos como foi e é importante a trigonometria e veríamos também a utilidade disto tanto antigamente quanto nos dias de hoje.

**Figura 4.13-** Resposta do aluno B no Pré -Teste.

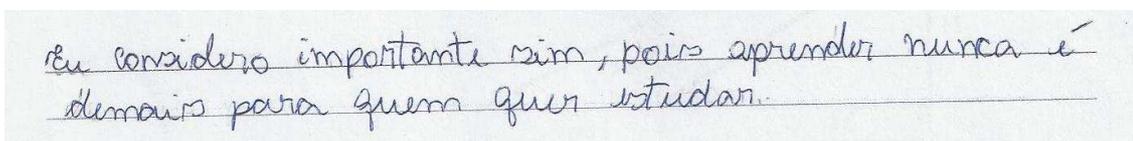
Trata-se de manifestação que configura a expectativa de quem passará por uma experiência que fará uso da História da Matemática, apostando que isso facilitará a aprendizagem. Os valores assinalados pelo aluno são importantes e úteis, evidenciados com entusiasmo. É evidente que nesse estágio de desenvolvimento o estudante não se dá conta dos elos entre aprendizagens, pois, para Moreira (2011), aprendizagem significativa é aquela preocupada com o desenvolvimento cognitivo, sensível aos níveis de desenvolvimento já alcançados, sem incorrer em repetições desnecessárias.



Sim, pois conhecendo um pouco da história ajudaria a compreender melhor o que tá sendo dado.

**Figura 4.14-** Resposta do aluno G no Pré -Teste.

O caso desta resposta também é de expectativa, tanto que ele diz que “a história **ajudaria** a compreender melhor o que tá sendo dado”. O aluno acredita que a História da Matemática ajude e contribua para a aprendizagem de trigonometria, o que vai ao encontro do que afirma Moreira (2011).

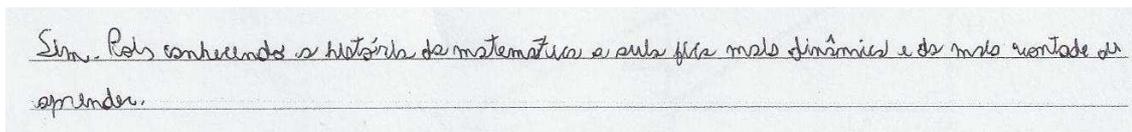


Eu considero importante sim, pois aprender nunca é demais para quem quer estudar.

**Figura 4.15-** Resposta do aluno H no Pré -Teste.

Trata-se de mais um caso de expectativa de contribuição da história para aprender trigonometria, pois o aluno considera importante, ratificando o valor da aprendizagem em si. Tal fala, mais uma vez ratifica o caso de alunos dispostos a aprender, o que suscita a fala de Moreira (2011) segundo a qual o aprendiz precisa se dispor a aprender que, em sua concepção, consiste em relacionar o conteúdo ou material novo, potencialmente significativo

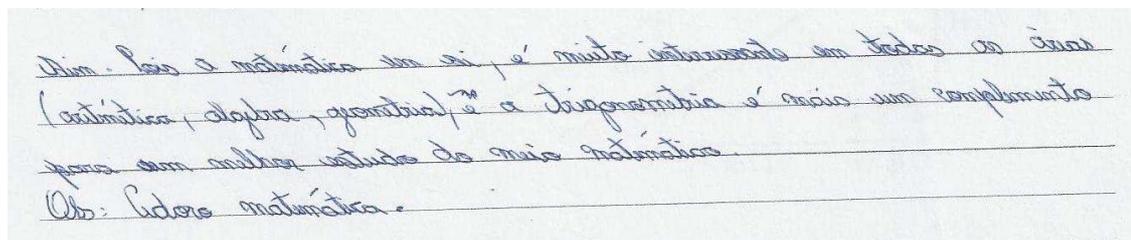
a sua estrutura ou repertório cognitivo.



Sim. Pois conhecendo a história da matemática a aula fica mais dinâmica e dá mais vontade de aprender.

**Figura 4.16-** Resposta do aluno K no Pré -Teste.

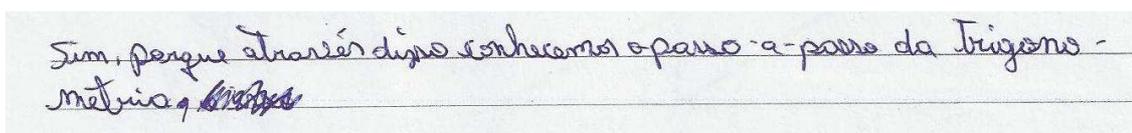
Este aluno exemplifica os casos anteriores, aplicando a lógica dedutiva para apostar que previamente “conhecendo a história a aula fica mais dinâmica e dá mais vontade de aprender”. Parece que tal fala aposta em que quem se prepara previamente para uma aula tem mais facilidade de ampliar seu horizonte cognitivo, pois este estudo pode funcionar como “organizadores prévios”, conforme estudo de Cajazeiras (2011), além disso "a aula fica mais dinâmica" demonstra que o aluno acredita que haverá a participação ativa dele com o professor, características do diálogo citado por Moreira (2011).



Sim. Pois a matemática em si, é muito interessante em todos os casos (aritmética, álgebra, geometria) e a trigonometria é mais um complemento para um melhor estudo da mais matemática.  
Obs: Adoro matemática.

**Figura 4.17-** Resposta do aluno L no Pré -Teste.

O sim deste aluno L – que diz adorar matemática, significa mais uma aposta festiva de quem aguarda que a História da Matemática constitua um pré-requisito para efetuar aprendizagens interligadas de trigonometria e assim avance em outras áreas correlatas. Ainda que o aluno não se dê conta de que “organizadores prévios” são construídos levando em conta o que será abordado, pois ele deverá ser um elo facilitador no processo ensino-aprendizagem.

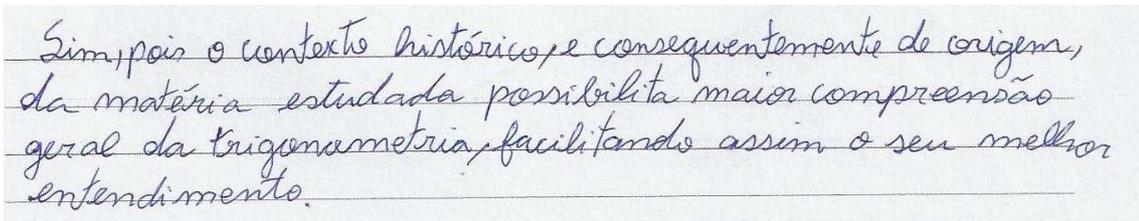


Sim, porque através disso conhecemos o passo a passo da Trigonometria e assim.

**Figura 4.18-** Resposta do aluno R no Pré -Teste.

Ainda que a resposta deste aluno seja oriunda de seu pré-teste, parece indicar a sua

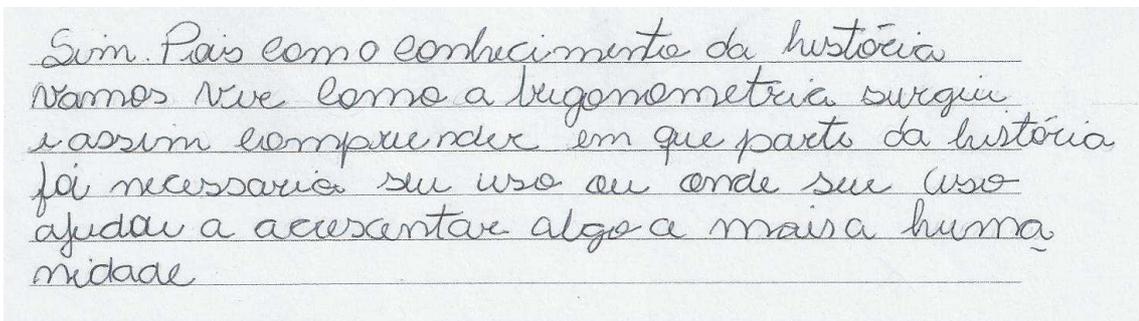
clareza em que o ensino deva garantir um encadeamento lógico em que o “passo-a-passo” seja uma alusão aos elos na corrente ou cadeia de aprendizagem. Portanto, estão aqui, mais uma vez, enredados os “organizadores prévios”, de que nos fala Moreira (2010 - Apud Cajazeiras, 2011).



Sim, pois o contexto histórico e consequentemente de origem, da matéria estudada possibilita maior compreensão geral da trigonometria, facilitando assim o seu melhor entendimento.

**Figura 4.19-** Resposta do aluno S no Pré -Teste.

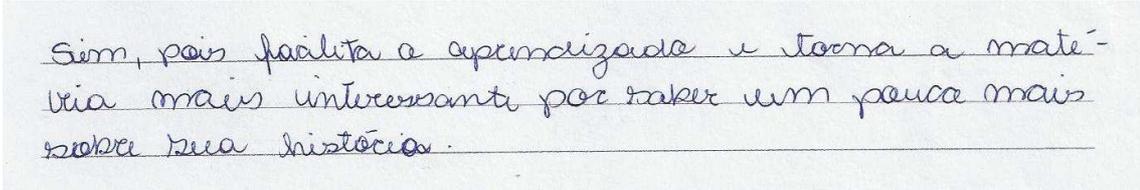
Importante assinalar a referência deste aluno ao “contexto histórico” no qual o conhecimento produzido sirva como base de sustentação necessária a uma outra aprendizagem ou “o seu melhor entendimento”. Mesmo sem dispor de conhecimentos teóricos sobre aprendizagem, certamente, a vivência dessa experiência concreta já lhe fornece elementos para argumentar pela importância disso para aprender.



Sim. Pois com o conhecimento da história vamos ver como a trigonometria surgiu e assim compreender em que parte da história foi necessário seu uso ou onde seu uso ajudou a acrescentar algo mais a humanidade.

**Figura 4.20-** Resposta do aluno F no Pós -Teste.

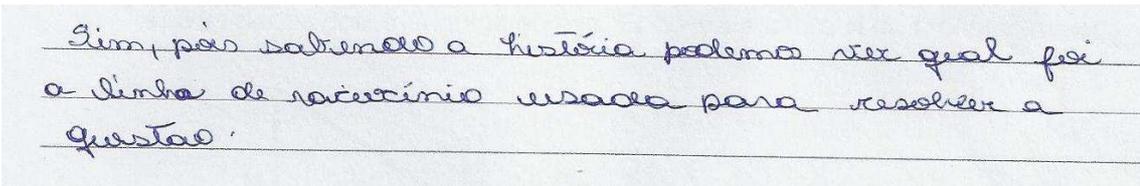
A resposta em pauta é oriunda de pós-teste, portanto de estudante que já passou pela experiência pedagógica, e a partir daí é que ele afirma: “com o conhecimento da história vamos ver como a trigonometria surgiu e assim compreender em que parte da história foi necessário seu uso ou onde seu uso ajudou a acrescentar algo mais a humanidade”. Ao que parece ele confirma que lhe ajudou em termos de ganho de aprendizagem, ou seja o que diz D'Ambrósio (2006) que uma percepção da História da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino, e não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento facilitador de grande importância.



Sim, pois facilita a aprendizagem e torna a matéria mais interessante por saber um pouco mais sobre sua história.

**Figura 4.21-** Resposta do aluno G no Pós -Teste.

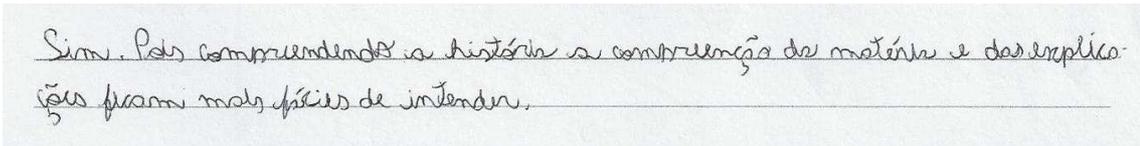
A resposta deste aluno relaciona positivamente a História da Matemática com aprendizagem da “matéria”, que, em seu entendimento, fica “mais interessante”. Tal posicionamento remete a Sad (2004) que afirma que o uso da História da Matemática é importante porque aumenta a predisposição para aprender, além de situar a matemática cronologicamente em relação aos produtos e a sua própria constituição, para compreender as condições ou o contexto de sua produção.



Sim, pois sabendo a história podemos ver qual foi a linha de raciocínio usada para resolver a questão.

**Figura 4.22-** Resposta do aluno I no Pós -Teste.

O sim deste aluno no pós-teste, articulado ao seu argumento de que o conhecimento do história aponta a “linha de raciocínio” aplicada para resolver questões, é reforçado pelos PCN's (1998): ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

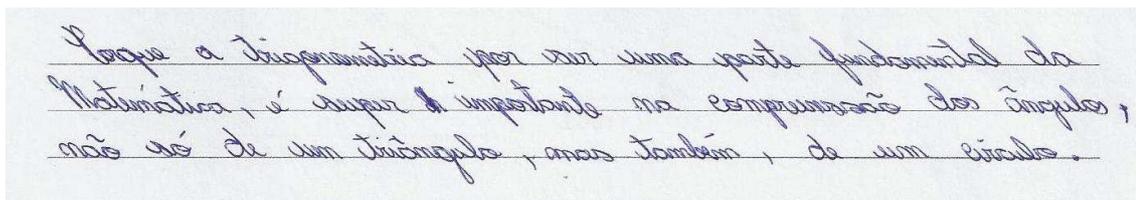


Sim. Pois compreendendo a história a compreensão da matéria e das explicações ficam mais fáceis de entender.

**Figura 4.23-** Resposta do aluno K no Pós -Teste.

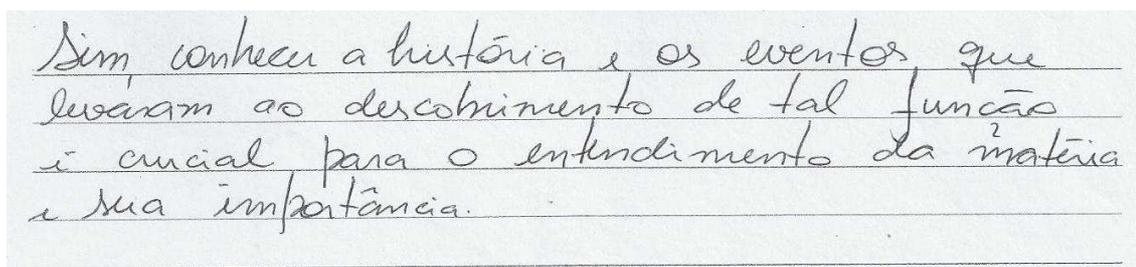
Este aluno K manifesta-se positivamente à pergunta feita, no seu pós-teste, justificando que a compreensão ou o entendimento da matéria e das explicações correlatas é

facilitada quando estudou previamente a história. Mais um caso que corrobora a literatura, sobretudo Sad (2004) que diz que aumenta a predisposição para a aprendizagem, tem ação problematizadora, utilizando em especial o diálogo e Viana e Silva (2007) onde dizem que a História da Matemática no ensino pode ser usada como uma ferramenta motivadora nas aulas de matemática, objetivando proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja.



**Figura 4.24-** Resposta do aluno L no Pós -Teste.

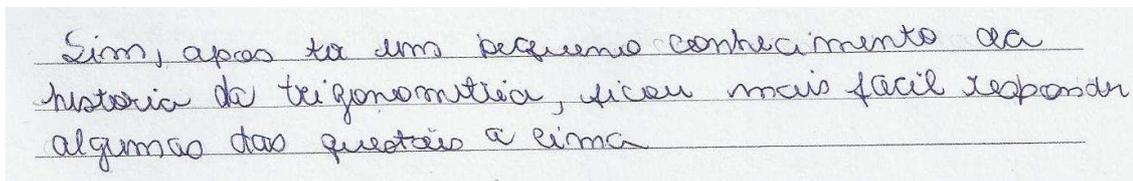
A resposta deste aluno parece indicar que ele não entendeu muito bem a questão, pois sua justificativa é distanciada do cerne daquilo que foi perguntado, como se ele quisesse sobressaltar a importância da disciplina em seus distintos aspectos. Ainda que a História da Matemática não se constitua em simples estratégia metodológica, como o asseguram Nobre e Baroni (1999), pois na fala desses autores fica o registro de que tal dinâmica ultrapassa a isso e até a motivação, pois o mais importante é que a aula – de qualquer conteúdo de matemática também retome e se fundamente na história, como o foi realizado.



**Figura 4.25-** Resposta do aluno O no Pós -Teste.

Este aluno responde sim a pergunta feita e justifica dizendo que “conhecer a história e os eventos que levaram ao descobrimento de tal função é crucial para o entendimento da matéria e sua importância”. Ao que parece esse argumento redesenha a fala dos autores Nobre e Baroni e Teixeira (2005) onde dizem que a História da Matemática pode apoiar diversas necessidades educacionais e promover mudanças. Neste sentido, o uso da História da Matemática pode servir a diversas situações, dentre as quais apresentar a História da

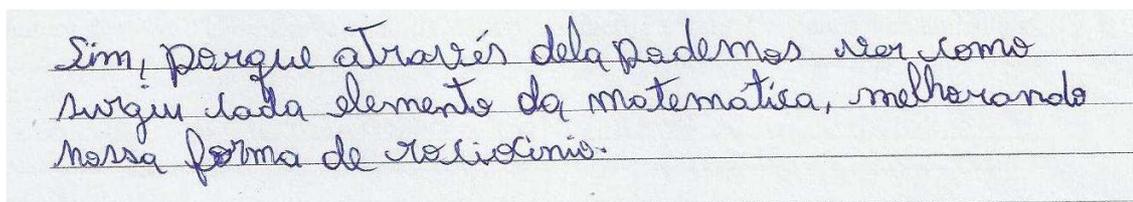
Matemática como elemento mobilizador em salas de aulas com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem.



Sim, após ter um pequeno conhecimento da história da trigonometria, ficou mais fácil responder algumas das questões a cima.

**Figura 4.26-** Resposta do aluno P no Pós -Teste.

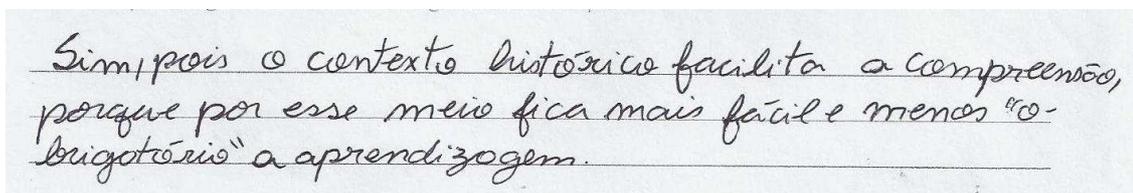
O "sim" deste aluno vai na mesma direção da maioria dos demais, ou seja, ratificando que após ter passado por uma experiência pedagógica ilustrativa da pergunta feita. Isso reitera a fala dos autores já mencionados.



Sim, porque através dela podemos ver como surgiu cada elemento da matemática, melhorando nossa forma de raciocínio.

**Figura 4.27-** Resposta do aluno R no Pós -Teste.

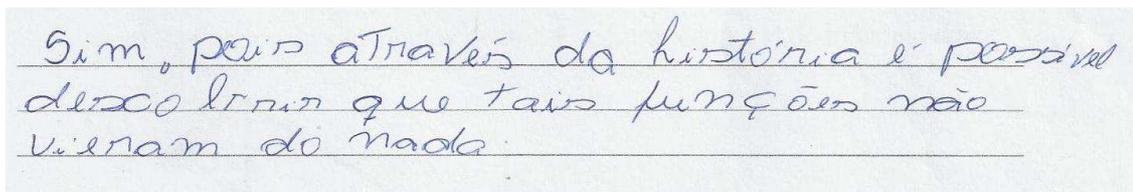
A fala deste aluno explica que – após ter vivenciado a experiência pedagógica, parece ter percebido a História da Matemática como facilitadora para o estudo da matemática. Ratifica as enunciações dos autores Viana e Silva (2007) sobre a relação direta entre conhecimento da história e aprendizagem dos conteúdos correlatos.



Sim, pois o contexto histórico facilita a compreensão, porque por esse meio fica mais fácil e menos "co-brigatório" a aprendizagem.

**Figura 4.28-** Resposta do aluno S no Pós -Teste.

O depoimento do aluno S confirma a fala no pós-teste, da maioria dos estudantes antecedentes, bem como a afirmativa dos PCN's (1998) ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.



Sim, pois através da história é possível descolinar que tais funções não vieram do nada.

**Figura 4.29-** Resposta do aluno U no Pós -Teste.

Finalmente, o depoimento do aluno em foco, ratificando a fala de alguns de seus pares, pois também reitera as conclusões dos PCN's (1998) onde ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento.

Em resumo, vale dizer que nessa análise pormenorizada tendemos a valorizar - em termos de dar maior credibilidade, as respostas provenientes dos pós-testes, porque neste caso são manifestações recheadas pela experiência pedagógica que tinham acabado de vivenciar. Ao passo que as respostas dadas no pré-teste, eram mais palpites sugestivos.

A análise das respostas dos alunos em relação ao posicionamento dos autores citados, que discutem a importância do estudo da História da Matemática para a aprendizagem da trigonometria, permite evidenciar que mesmo sem terem conhecimento teórico sobre o assunto, estes estudantes acabam tangenciando e mesmo corroborando tais posicionamentos dos autores que têm se debruçado sobre o assunto.

#### **4.4 POSICIONAMENTO ESTUDANTIL SOBRE O USO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA NO PROCESSO DE ENSINO, SE FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO**

As manifestações de 14 (catorze) estudantes do 2º período, da 1ª série do ensino Médio, sobre um texto especificamente preparado por nós – sob a forma de um Ensaio, para estudo individualizado, no contra-horário das aulas, foram apresentadas a seguir, cumprindo antecipar duas observações importantes: (a) No momento em que o instrumento foi respondido só pudemos contar com a colaboração de 14 dos 21 estudantes que participaram da experiência; e (b) Embora o Ensaio não se constituísse em objeto de estudo em classe – pois foi fornecido aos alunos para leitura no contraturno das aulas, nós o mantivemos como

objeto de preocupação, em sala de aula, fazendo remissão constante a ele, perguntando se os alunos estavam gostando, o que estavam achando desse material, e fazendo dele referência constante, durante as aulas, sempre que oportuno e cabível. Portanto, esse material era considerado como elemento integrante da experiência pedagógica em foco e veio a se constituir na parte qualitativa da pesquisa. Portanto, ao concluir a experiência procedemos a uma intermediação formal sobre o Ensaio, através de uma sondagem mediada por questionário específico, focado nesse material de estudo paralelo. Trata-se de um questionário com seis perguntas subjetivas e resposta construída (Apêndice 1), que tinha por objetivo: coletar a expressão discursiva dos estudantes sobre a forma e o conteúdo abordado no Ensaio bem como captar as suas impressões sobre o nível de contribuição desse material para a motivação e a aprendizagem dos mesmos. Eis, então no que se concentram as análises seguintes:

A **primeira** questão "*Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a trigonometria?*" levantava o posicionamento dos alunos sobre os motivos que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem trigonometria, as respostas puderam ser agrupadas em três eixos, que remetem a busca de conhecimentos; a busca de melhores condições de vida e sobrevivência; e por mera curiosidade.

A maioria dos alunos explica o interesse dos matemáticos da antiguidade pela trigonometria em virtude da relevância atribuída - direta ou indireta, a ampliação de conhecimentos, conforme suas palavras o exemplificam.

*Aluno A:* Em busca por novos conhecimentos e realizações (...) a busca pela evolução do homem e o aumento de suas possibilidades e (...) na época em que viveram.

*Aluno D:* Queriam buscar novos conhecimentos, novas teorias ou formas de facilitar mais a vida, através da trigonometria, buscamos obter mais conhecimento. Também acho que eles não tinham nada pra fazer, quem sabe sabiam bulling e passava a vida isolados a estudar.

*Aluno E:* Resolver problemas de astronomia, orientar as navegações, determinar latitude e longitude de um ponto a outro no mapa.

*Aluno J:* Queriam obter maiores conhecimentos a fim de aplicar estes em seus trabalhos.

*Aluno N:* Obter mais conhecimento (...) Acho que eles queriam conhecer coisas novas e tudo que eles tinham era uma matemática muito básica, sem grandes explicações. Pois a região onde eles habitavam tinha pouco conhecimento, assim estudavam sempre em busca de conhecimento.

*Aluno I:* A necessidade por fórmulas que facilitassem os problemas matemáticos do cotidiano (da vida).

*Aluno T:* Provavelmente porque queriam saber a altura de algo, ou comprimentos. Eu, realmente não sei; pelo que eu estudei sobre o conteúdo histórico deduzi que seria isso.

Aluno Q: Pois através de *construção* de pirâmides eles souberam que o triângulo é a forma mais resistente das construções e para ajudar a resolver os problemas de astronomia.

Aluno R: As necessidades da época. (...) Como exemplo as *construções*. Porque através do estudo da trigonometria pode-se com poucas informações descobrir altura de edificações, áreas de um determinado local, etc.

Três respondentes justificaram tais estudos de trigonometria pelas exigências das condições de vida, no sentido de melhorar a vida cotidiana. Em suas palavras:

Aluno B: Por melhores condições de sobrevivências (...) não só a trigonometria mas a matemática em geral, aprimorando a qualidade de vida, já que os números sempre estiveram em nossa vida.

Aluno G: Para facilitar a vida cotidiana, como *construções* de casas, entre outros.

Aluno S: Para facilitar a vida corriqueira. Na vida cotidiana, nas construções, isso facilita nas medidas e nos progressos.

Finalmente, dois dos alunos justificaram o interesse pelos estudos de trigonometria, na antiguidade em razão de mera curiosidade desinteressada. É o que dizem:

Aluno C: Curiosidade (...) Na minha humilde opinião eles tinham curiosidade, não sabiam nada do que viam, apenas olhavam e o interesse estava ali e daí começaram as pesquisas e iniciar os estudos.

Aluno H: A curiosidade de como foram feitas as coisas. (...) Na antiguidade não existiam muitas coisas a se fazer então pessoas procuravam por terem muita curiosidade e hoje em dia procuram aperfeiçoar o que encontram do passado.

Pudemos observar, pelos exemplos acima transcritos, que os mesmos tratam de posicionamentos grupais que evidenciam distintas explicações possíveis para o interesse que levou os matemáticos da antiguidade a estudarem a trigonometria.

A **segunda** "Você acha que ao estudar um determinado conteúdo matemático, seu professor falar sobre a história deste conteúdo, sua aprendizagem seria melhor? Sim ou Não?" Justifique em poucas palavras" compelia o grupo de alunos a se manifestar sobre a própria situação em que estavam, isto é, estudando trigonometria de modo interligado a história desse conteúdo. O posicionamento do grupo foi em três grupos, também: um que aprova a metodologia de conjugação; outro que desaprova tal metodologia e outro que evidencia ponderações restritivas.

O grupo que, de imediato diz **sim**, sinalizando acordo a tal estratégia de ensino-aprendizagem é constituído pela maioria dos estudantes que responderam ao instrumento de coleta de dados e suas manifestações textuais foram aqui explicitadas:

Aluno A: Sim, pois o contexto histórico nos ajuda a lembrar desse conteúdo, através de como se chegou a ele.

Aluno B: Sim, nós vemos como a matemática evoluiu e o conteúdo é mais interessante e mais claro.

Aluno D: Sim, pois saber da história que originou as fórmulas, nos ajuda a entender melhor os teoremas e até mesmo gravar com mais facilidade.

Aluno E: Sim, deste modo facilita ao estudante a compreender, porque surgiu determinado conteúdo. O que isso favoreceu no passado e o que pode contribuir no futuro.

Aluno G: Sim, pois faria que meu interesse por tal assunto aumentasse.

Aluno H: Sim, pois saberíamos o porque daquilo.

Aluno I: Sim, saber qual o motivo e qual a aplicação do conteúdo torna a matéria mais interessante.

Aluno J: Sim, pois saberíamos como os conceitos foram desenvolvidos e como foram aplicados.

Aluno N: Sim, pois assim teremos uma melhor noção de como aplicar as fórmulas nos cálculos que fazemos.

Aluno R: Sim, porque conhecendo a história acaba-se aprendendo alguns atalhos da matemática.

Aluno S: Sim, pois nós sabíamos de onde vem a teoria e as fórmulas.

Aluno Q: Sim, pois ao falar sobre a história do conteúdo faz com que os alunos entendam a maneira como o mesmo foi descoberto e criado e o porquê de ser utilizado até hoje.

O estudante que evidenciou ponderação (aluno C) justifica o próprio posicionamento, dizendo que acha “interessante, mas que seja de forma sucinta e não ser o professor pergunte na prova um tipo história antiga da matemática”.

O estudante que disse **não** a pergunta do questionário (aluno T) justifica-se dizendo que “Porque vamos usar somente a conclusão de toda a história, ou seja, as fórmulas.

No conjunto de manifestações dos alunos sobre a segunda questão é possível ler o reconhecimento, quase geral, da relevância do estudo de conteúdos matemáticos simultaneamente ao estudo da história daquele conteúdo. Tal posicionamento ratifica as manifestações destes durante o curso de estudos de trigonometria.

A **terceira** questão *"No ensino fundamental algum professor seu de matemática falou da História da Matemática? Sim ou Não? Descreva em poucas palavras"* investiu em verificar se algum professor de matemática no ensino fundamental falou da História da Matemática. As repostas dos alunos dividiram o grupo em dois: cinco disseram sim (os alunos B, C, D, G e Q) e nove disseram não (os alunos A, E, I, J, H, N, R, S e T)

O grupo de estudantes que disse **sim**, apresentam os seguintes comentários:

Aluno B: Mas doravante tal fato ocorreu.

Aluno C: De forma breve, falando que foi a muitos anos e citando os nomes de alguns estudiosos da matemática.

Aluno D: Falou sobre quem foi Pitágoras, Ptolomeu, dentre outros grandes matemáticos.

Aluno G: Meu professor explicou como surgiu o teorema de Pitágoras.

Aluno Q: Mas de forma artificial, quando foi enunciado o estudo da geometria.

Assim, as indicações são dispersas e com indícios de que tais experiências foram superficiais, espaçadas, não passando de breve contextualização do assunto que então passava a ser trabalhado.

No caso do grupo de estudantes que disse não, quatro estudantes ( I, J, R, S ) foram lacônicos ou sumários restringindo-se ao **não**, sem qualquer outro comentário, e cinco tecem comentários breves, de teor parecido aos seus colegas que disseram sim:

Aluno A: porém citou algumas curiosidades sobre os criadores do mesmo.

Aluno E: Eles apenas ensinaram as fórmulas e aplicações.

Aluno H: Eles não achavam que era importante falar sobre a história deles.

Aluno N: Pois estudei em colégio estadual onde eles só te dão a fórmula.

Aluno S: O professor jogava as fórmulas.

Em resumo, nestas respostas, observamos que a História da Matemática ainda é um assunto que não é muito contemplado no ensino fundamental, pois mesmo os alunos que responderam "sim" à questão deram a entender que o que lhes foi passado sobre o assunto, foi feito de forma superficial, e o pouco que foi mostrado fala sobre a história de Pitágoras, comentando o seu teorema.

Com a **quarta** questão "*Antes de estudar no segundo período do ensino médio, você já conhecia a História da Trigonometria? Sim ou Não? Se sim, o que você conhecia?*" desejava-se saber se antes de estudar no primeiro ano do ensino médio o estudante já conhecia a História da Trigonometria. Apenas um estudante disse que sim e 13 disseram não.

O aluno que disse **sim** (aluno I) expõe sua opinião, dizendo: "Sim, mas poucas coisas, como o motivo que levaram as pessoas a criarem a trigonometria".

Dentre os que disseram **não**, 10 foram sumários, sem mais explicações nem detalhes ( alunos A, D, E, G, H, J, N, R, S e T ). Os quatro outros não entram em explicações maiores: o aluno B usa uma alocação reforçadora - "não conhecia ainda". O aluno C pondera dizendo que "a história em si não, mas alguns fatos, talvez os mais importantes". O aluno Q disse que "não foi através das aulas e das leituras do livro que adquiri conhecimento".

Pela maioria das respostas, verificamos mais uma vez que a História da Matemática, especificamente, História da Trigonometria, não é assunto estudado no nono ano, aonde se faz o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A **quinta** questão "*A leitura do livro "Uma Breve História da Trigonometria e seus Conceitos Fundamentais" trouxe a você uma motivação para a aprendizagem de trigonometria? Justifique em poucas palavras.*" visava a coletar depoimentos sobre se o Ensaio - de nossa

autoria, “Uma breve História da Trigonometria e seus conceitos fundamentais”, trouxe motivação para aprendizagem de trigonometria. O grupo subdividiu-se: nove alunos disseram **sim**; quatro disseram não; e um caso a parte, que é o aluno J, que diz: “o livro não trouxe motivação mas ajudou na aprendizagem da trigonometria”.

Os depoimentos do grupo que disse **sim** foram explicitados nos seguintes termos:

Aluno A: “(...) devido às realizações de seus autores (mestres matemáticos da época) que revolucionaram suas determinadas épocas com suas descobertas”.

Aluno B: “(...) o que ficou acompanhando o livro, a compreensão por trigonometria ficou melhor, incentivando-me a estudo de tal assunto, realmente cada vez mais”.

Aluno D: “(...) O livro é bem interessante, nos tira dúvidas que em breve poderiam surgir, facilitadas através do contexto histórico a aprender e gravar fórmulas e teoremas”.

Aluno G: “(...) pois me interessei mais pelo assunto e perceber para o que de fato a trigonometria serve”.

Aluno H: “(...) Pois com a leitura do livro aprendi histórias que não conhecia o que me fez querer saber mais sobre matemática”.

Aluno I: “(...) fica mais fácil lembrar”.

Aluno N: “(...) pois no livro tem explicada a trigonometria, os fundamentos das fórmulas o modo que eles pensavam e tudo ajuda para o desenvolvimento da matéria”.

Aluno R: “(...) pois pude ver, passo a passo, como surgiu cada conceito de trigonometria e isso facilita o meu aprendizado”.

Aluno S: “(...) Eu achei muito interessante. A história da trigonometria e esse incentivava.”.

Aluno Q: “(...) pois como citado anteriormente, ao conhecer a história do assunto a ser estudado aumenta o interesse”.

Dentre os estudante que disseram **não**, um deles (aluno T) foi sumário, sem qualquer comentário. As explicações foram explicitadas nos seguintes termos:

Aluno C: “(...) A trigonometria em si é algo fantástico (apesar de eu não me dar bem com os números). Mas por conta dessa minha dificuldade, não é algo que eu gostaria de aprender mais”.

Aluno E: “(...) O livro não me motivou a estudar a trigonometria, mas sim que a matéria possui características próprias e que precisa de dedicação”.

Mediante a grande maioria das respostas afirmativas, sentimos que o Ensaio contribuiu para uma melhor aprendizagem e interesse dos alunos sobre o conteúdo de trigonometria, o que reforça a tese de que o ensino, através da História da Matemática, traz uma melhoria ao aprendizado dos alunos.

Finalmente a **sexta** questão “*Você acredita que a História da Matemática, em outros assuntos (conteúdos), ajudaria em sua aprendizagem em matemática? Sim ou Não? Justifique em poucas palavras.*” do questionário, desejava-se saber se a História da Matemática em outros assuntos (conteúdos) ajudaria em sua aprendizagem, pois a ideia era verificar se eles fariam alguma transposição de conhecimentos. Onze alunos disseram **sim** e dois disseram **não**.

Os estudantes que disseram **sim**, explicaram os seus posicionamentos nos seguintes termos:

*Aluno A:* “(...) porém depende de sua abordagem em sala e através de exercícios.

*Aluno B:* “(...) ao contextualizar a matemática e outros assuntos (conteúdos), ou seja, um assunto complementando o outro; melhorando a qualidade do estudo.”

*Aluno D:* “(...) pois a história facilita o entendimento das fórmulas e teoremas.”

*Aluno E:* “(...) acredito que facilitaria a aprendizagem”.

*Aluno G:* “(...) pois me despertaria maior interesse pelos outros conteúdos.”

*Aluno H:* “(...) pois sabendo a história, sabemos como eles chegaram a tal coisa e também faz com que nos interessemos mais a aprender.”

*Aluno I:* “(...) sumariamente sim.

*Aluno J:* “(...) pois saberíamos como aplicar as fórmulas aprendidas.”

*Aluno N:* “(...) pois assim facilita até para nós mesmos montarmos as fórmulas e aplicar o que é necessário.”

*Aluno R:* “(...) pois com ela percebe-se como a humanidade foi evoluindo através de conceitos lógicos e com isso influenciar nessas histórias. É que através desses conceitos pode chegar a explicações em outras matérias.

*Aluno S:* “(...) porque facilita o entendimento da matéria.

*Aluno Q:* “(...) pois teríamos um contato mais diversificado e menos “mecânico” típico de sala de aula”.

Os estudantes que disseram **não**, explicaram os seus posicionamentos nos seguintes termos:

*Aluno C:* “(...) Atualmente, como somos muito gratos pela descoberta desses matemáticos. Porém, hoje de fato, só nos interessa as fórmulas que são aplicadas.”

*Aluno T:* “(...) pelo mesmo motivo citado anteriormente (embora nas três questões anteriores o respondente tenha sido lacônico em seu não sumário).

Como já foi dito nas respostas à pergunta anterior, o ensino, através da História da Matemática, facilita o ensino do conteúdo a ser passado aos alunos, pois os mesmos passam a ter mais interesse e entendimento sobre a disciplina de matemática.

Em resumo, as falas dos alunos, ao longo das respostas ao questionário parece ratificar a relevância do Ensaio como material auxiliar e que contribuiu tanto na sua predisposição quanto na sua aprendizagem. Portanto, pode-se falar de uma relação positiva na conjugação desse Ensaio com o ensino convencional, trabalhando com turmas “intactas.”

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Objetivando investigar como a História da Trigonometria pode se constituir como um elemento facilitador da aprendizagem das funções seno e cosseno, podemos concluir que as médias obtidas pelos alunos em pré-teste e pós-teste usados, respectivamente antes e após ter sido desenvolvida a experiência que conjugava o ensino convencional das funções seno e cosseno com a leitura paralela de um Ensaio sobre a História da Trigonometria, apresentou um resultado no pós-teste significativamente superior do que no pré-teste, com um teste t significativo em favor do pós-teste. Tal resultado, indica que, conforme nossa aposta ou hipótese de estudo, o método trouxe avanço na aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos então trabalhados, durante as aulas do período letivo em foco.

Através do Ensaio elaboramos a reconstrução histórica e conceitual sobre as funções seno e cosseno, onde foi possível organizar os dados coletados junto aos alunos da seguinte forma: uma discussão sobre a aprendizagem significativa, uma vez que observamos que a mudança de estratégia nem sempre favorece ou facilita o ensino, isso porque alguns alunos expressaram que não houve relevância para o ensino da trigonometria (funções seno e cosseno); também o Ensaio, conforme os alunos, ajuda na compreensão do conteúdo na medida em que apontam que a História da Trigonometria facilita a memorização de fórmulas, nos parece que eles estão mais preocupados com a resolução das questões e distanciados dos conceitos fundamentais que envolvem as funções seno e cosseno; e, além disso, podemos destacar que o uso da História da Trigonometria, através do Ensaio, facilita a aprendizagem, na medida em que os alunos destacam que aumenta a predisposição para a aprendizagem, pois possibilita o diálogo, trazendo situações que possibilitam a problematização e compreensão dos conceitos.

Observamos, conforme análise estatística, que o pós-teste apresentou um resultado superior ao pré-teste, porém, não podemos apostar, com alto grau de confiabilidade, no sentido de afirmar que os resultados entre as médias sejam atribuídos inteiramente ao Ensaio, e nem ao ensino em sala de aula. Preferimos considerar que esse ganho se deva à associação de ambos os elementos, até porque, de acordo com Moreira (2011), além da diversidade de estratégias, a participação ativa do aluno é fundamental para que haja uma aprendizagem significativa.

## REFERÊNCIAS

APOLINÁRIO, F.: *Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico*, Atlas, São Paulo, 2004.

AUSUBEL, D.P.: **Aquisição e Retenção de Conhecimento: Uma Perspectiva Cognitiva**. Ed. Plátano Edições Técnicas, Portugal, 2000.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A.: **A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática**. In: BICUDO, M. A. (org.): **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. UNESP, p. 129-136. São Paulo, 1999.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R.: **A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). *Educação Matemática: pesquisa e movimento*. São Paulo: Cortez, 2005, p.164-185.

BOYER, C.B.: **A História da Matemática**. 3ª Ed., Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2010

BRASIL. Conselho Nacional de Saúde. Resolução N° 196 de 10 de Outubro. Diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos, 1996. Disponível em <http://conselho.saude.gov.br/resolucoes/1996/reso196.doc>

BRASIL. :**Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL.: *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL.: **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução ao parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2000.

BRIGUENTI, M. J. L.: *Ensino e Aprendizagem de Trigonometria: Novas Perspectivas da Educação Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP-SP. São Paulo, 1994.

CAJAZEIRAS, V. L. L. C.: **Perspectivas da Pedagogia da Práxis no ensino de Física**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica), UNIGRANRIO – RJ. Rio de Janeiro, RJ, 2011.

CAMPBELL, D.T.; STANLEY, J.C.: **Delineamentos Experimentais e Quase-Experimentais de Pesquisa**. EPU: Ed.da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1979.

COSTA, N. M. L.: *Função Seno e Cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador*. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP. São Paulo, 1997,

CRESWELL, J. W.: *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre; Artmed, 2010.

- D'AMBRÓSIO, U.: *Educação matemática: da teoria à prática*. 13ª ed. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática), Campinas: Papirus 2006.
- EVES, H.: **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, 4ª Ed., Ed. Unicamp, Campinas, São Paulo, 2004.
- FREIRE, P. : **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. 36ª ed. , Ed. Paz e Terra, São Paulo, 1996.
- KENNEDY, E.S.: **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula**; trad.: Hygino H. Domingues, 7ª Ed., vol. 5, Ed.: Saraiva, São Paulo, SP, 1992.
- KERLINGER, F. : **Metodologia da pesquisa em ciências sociais: um tratamento conceitual**. Ed. EPU, São Paulo, 1980.
- LAGE, L.: **Enquadramento de números racionais em intervalos de racionais: uma investigação com alunos do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC – SP, 2006.
- LEVIN, J.: **Estatística Aplicada às Ciências Humanas**, 2ª Ed. Ed. Harper e Row do Brasil Ltda, São Paulo, SP, 1997.
- LINDEGGER, L.R.M.: **Construindo os conceitos básicos da Trigonometria no Triângulo Retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.
- MENDES, I. A.: *Ensino de Trigonometria através de Atividades Históricas*, 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UFRN, Rio Grande do Norte, 1997.
- MOREIRA, M. A. e MARSINI, E. F. S.: **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo; Moraes, 1982
- MOREIRA, M.A. : **Teorias de Aprendizagem**. 2ªed. , Ed. EPU, São Paulo, 2011
- MOREIRA, M.A. : **A Teoria da Aprendizagem e Sua Implementação em Sala de Aula**. Ed. Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- MOREIRA, M.A. : Conferência Proferida no **III Encontro Internacional Sobre Aprendizagem Significativa**, (Lisboa, 11 a 15 de setembro de 2000), 2010.
- OLIVEIRA, F. C.: *Dificuldades no Processo Ensino Aprendizagem de Trigonometria por Meio de Atividades*.. Dissertação (Mestrado em Educação) UFRN – RN, UFRN, Rio Grande do Norte, 2006.
- PAIS, L. C.: **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª Ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.
- PESTANA, M. ; GAGEIRO, J. N. : **Análise de Dados para Ciências Sociais: A Complementaridade do SPSS**. 2ª Ed., Ed. Silabo, Lisboa, 2000.
- SAD, L. A.: *Educação Matemática: Unidade na História e nos Objetivos Educacionais*. In: ANAIS do VII EPEM, SP, junho de 2004, p. 1-5.

SALVADOR, Â. D.: *Métodos e Técnicas de pesquisa bibliográfica*. Porto Alegre; Sulina, 1986.

SAMPAIO, H.R.: *Uma abordagem Histórica-Filosófica na Educação Matemática: contribuição ao processo de aprendizagem de trigonometria no ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, 2008.

SILVA, S. A.: *Trigonometria no Triângulo Retângulo: Construindo uma Aprendizagem Significativa*. São Paulo, 2005, 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP.

SILVEIRA, J. S.: *Uma proposta para o ensino de trigonometria através da história da matemática*. Dissertação de Mestrado. UNESP/Ilha Solteira, 2010.

Site: [econometricum.blogspot.com/2010/02/distribuicao-t-de-student.html](http://econometricum.blogspot.com/2010/02/distribuicao-t-de-student.html).

SOUZA, J. F.: *Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática*. Dissertação de Mestrado. UFRRJ, 2009.

SOUZA, C.A. ; VICTER, E.F.; LOPES, J.R. : **Uma breve história da trigonometria e seus conceitos fundamentais**. Ed. Entorno, Mesquita, Rio de Janeiro, 2011.

TAHAN, M. : **O Homem Que Calculava**. 79ªed. , Ed. Record, Rio de Janeiro, 2010.'

VIANA, M.C.V.; SILVA, C.M.: **Concepções de Professores de Matemática sobre a Utilização da História da Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem**. In: ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9, 2007, p.7. Belo Horizonte. B.H., 2007.

# APÊNDICE 1

## QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO

Nome.....Nº.....Turma.....Data..../..../....

Responda sucintamente às perguntas:

Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a trigonometria?.....

Justifique sua resposta:.....  
.....  
.....

Você acha que ao estudar um determinado conteúdo matemático, seu professor falar sobre a história deste conteúdo, sua aprendizagem seria melhor? Sim ou Não? Justifique em poucas palavras.

.....  
.....  
.....  
.....

No ensino fundamental algum professor seu de matemática falou da História da Matemática? Sim ou Não? Descreva em poucas palavras.

.....  
.....  
.....

Antes de estudar no segundo período do ensino médio, você já conhecia a História da Trigonometria? Sim ou Não? Se sim, o que você conhecia?

.....  
.....  
.....

A leitura do livro "Uma Breve História da Trigonometria e seus Conceitos Fundamentais" trouxe a você uma motivação para a aprendizagem de trigonometria? Justifique em poucas palavras.

.....  
.....  
.....  
.....

Você acredita que a História da Matemática, em outros assuntos (conteúdos), ajudaria em sua aprendizagem em matemática? Sim ou Não? Justifique em poucas palavras.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

## APÊNDICE 2

## TESTE DE VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM



## AVALIAÇÃO

Aluno(a): \_\_\_\_\_ Código \_\_\_\_\_

**I. ASSINALE A ALTERNATIVA QUE MELHOR COMPLETA OS ENUNCIADOS DE 1 A 9.**

1) A Matemática consta de algumas partes dentre elas a aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria, cada uma das quais estuda uma dimensão desse campo de saber. A trigonometria estuda...

- A) Os números
- B) Os ângulos
- C) A circunferência
- D) O triângulo retângulo

2) Quanto a origem dos assuntos abordados em Trigonometria pode-se afirmar que esses tiveram origem na idade...

- A) Antiga
- B) Média
- C) Moderna
- D) Contemporânea

4) Muitos são os feitos creditados ao filósofo e Matemático Tales de Mileto. Assinale a opção que corresponde a um desses feitos ...

- A) A descoberta da função seno
- B) A previsão de um eclipse
- C) A descoberta de que o quadrado da hipotenusa de um triângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos
- D) A fórmula  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



**II. RESPONDA, SUCINTAMENTE A SEGUINTE QUESTÃO:**

9) Você considera importante conhecer a história da matemática, paralelamente ao estudo de trigonometria, para facilitar a aprendizagem dos conteúdos de trigonometria? Por que?

---

---

---

---

---

---

---

---

## APÊNDICE 3

### PLANO DE UNIDADE

<b>1) IDENTIFICAÇÃO:</b>	
Disciplina: Matemática II	Curso: Técnico em meio ambiente
	Regime: semestral
Carga Horária : 72 horas	Período Letivo: 2º bimestre 2011
Professor: Carlos Antonio de Souza	
Coordenação de Origem: Matemática	
Assunto Central: Trigonometria	Duração Provável: ..... h.a.
<b>2) EMENTA:</b>	
Semelhança de Triângulos. Trigonometria no Triângulo Retângulo. Razões Trigonométricas na Circunferência. Relações entre Funções. Transformações Trigonométricas. Funções Trigonométricas.	
<b>3) OBJETIVOS :</b>	
Desenvolver no educando a capacidade de trabalhar com os tópicos básicos em trigonometria e suas aplicações. Os alunos deverão vivenciar experiências de ensino-aprendizagem sobre os fundamentos da trigonometria no triângulo retângulo e na trigonometria circular, bem como na resolução de problemas relacionados aos conceitos aprendidos.	
<b>4) PROGRAMA:</b>	
<p>1- Semelhança De Triângulos</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1- Triângulos Semelhantes</p> <p style="padding-left: 20px;">1.2- Relações Métricas No Triângulo Retângulo</p> <p>2- Trigonometria No Triângulo Retângulo</p> <p style="padding-left: 20px;">2.1- Razões Trigonométricas</p> <p style="padding-left: 20px;">2.2- 1ª Relação Fundamental</p> <p style="padding-left: 20px;">2.3- 2ª Relação Fundamental</p> <p style="padding-left: 20px;">2.4- Ângulos Notáveis</p> <p>3- Razões Trigonométricas na Circunferência</p> <p style="padding-left: 20px;">3.1- Ciclos Trigonométricos</p> <p style="padding-left: 20px;">3.2- Noções Gerais (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.)</p> <p>4- Relações Entre Funções</p> <p style="padding-left: 20px;">4.1- Relações Fundamentais</p> <p style="padding-left: 20px;">4.2- Relações Recorrentes</p> <p style="padding-left: 20px;">4.3- Identidades Trigonométricas</p> <p>5- Transformações</p> <p style="padding-left: 20px;">5.1- Fórmulas de Adições</p> <p style="padding-left: 20px;">5.2- Fórmulas de Multiplicações</p>	

6- Funções Trigonométricas. 6.1- Função Seno 6.2- Função Cosseno 6.3- Função Tangente 6.4- Função Cotangente 6.5- Função Secante 6.6- Função Cossecante
<b>5) PROCEDIMENTOS DE ENSINO:</b>
- Aulas expositivas dialogadas e resolução de exercícios - No início de cada aula, fazer um comentário do ensaio em relação ao assunto a ser discutido nesta aula.
<b>6) RECURSOS:</b>
Quadro negro e giz; Exemplar do Ensaio para cada sujeito participante do estudo.
<b>7) BIBLIOGRAFIA BÁSICA:</b>
IEZZI , Gelson...[et al]. <b>Matemática: ciência e aplicações</b> , 1ª Série: Ensino Médio, Ilustrador Izomar, Artur Kenji Ogawa. – 2. Ed. – São Paulo: Atual, 2004. – (Coleção Matemática: Ciência E Aplicações)
IEZZI , Gelson...[et al]. <b>Matemática: ciência e aplicações</b> , 2ª Série: Ensino Médio, Ilustrador Izomar, Artur Kenji Ogawa. – 2. Ed. – São Paulo: Atual, 2004. – (Coleção Matemática: Ciência E Aplicações)
IEZZI, Gelson.: <b>Fundamentos de Matemática Elementar</b> , vol. 3, . São Paulo, Atual, 1993.
SOUZA, Carlos Antonio de; VICTER, Eline das Flores; LOPES, Jurema Rosa: <b>Uma breve história da Trigonometria e seus conceitos fundamentais</b> , Editora Entorno, Mesquita, RJ, 2011.
<b>8) AVALIAÇÃO:</b>
Antes de iniciar o processo ensino-aprendizagem será realizada uma avaliação <b>diagnóstica</b> , através de perguntas que levem os estudantes a refletirem e exporem dados de suas realidades, ligadas ao tema central da unidade. Durante os estudos serão realizados exercícios de fixação, enquanto avaliação <b>formativa</b> , ou seja, para consolidar aprendizagens. A avaliação somativa, ou seja, com função de atribuir nota, cumprindo a função cartorial escolar, será realizada nos seguintes termos: a unidade será dividida em duas partes. a primeira parte será composta por semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo e razões trigonométricas na circunferência e a segunda parte será composta por relações entre funções, transformações e funções trigonométricas. Serão realizadas duas avaliações. a primeira avaliação será composta da seguinte maneira: nota da prova acrescida da nota relativa a leitura do ensaio. a segunda avaliação terá o mesmo esquema da primeira, com os respectivos conteúdos.

## ANEXO 1

## PARECER DO CEP-UNIGRANRIO AO PROJETO DE PESQUISA



Duque de Caxias, 10 de Novembro de 2011

Do: Comitê de Ética em Pesquisa da UNIGRANRIO  
Para Pesquisador: Carlos Antônio de Souza  
Orientadora: Profa. Dra Eline das Flores Victor

Co-Orientadora: Profa. Dra. Jurema Rosa Lopes

O Comitê de Ética em Pesquisa da UNIGRANRIO, após avaliação considerou aprovado o projeto de pesquisa "UM ESTUDO DE CASO: A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA PARA O ENSINO DE SENO E COSSENO", protocolado sob o nº. 0144.0.317.000-11, encontrando-se a referida pesquisa e o Termo de consentimento Livre e Esclarecido em conformidade com a Resolução N.º 196, de 10 de outubro de 1996, do Conselho Nacional de Saúde, sobre pesquisa envolvendo seres humanos.

O pesquisador deverá informar ao Comitê de Ética qualquer acontecimento ocorrido no decorrer da pesquisa.

O Comitê de Ética em Pesquisa solicita a V. Sª, que ao término da pesquisa, conforme cronograma apresentado, encaminhe a este comitê um sumário dos resultados do projeto, a fim de que seja expedido o certificado de aprovação final.

Prof. Renato C. Zambrotti  
Coordenador do CEP-UNIGRANRIO